FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJOS DE FIN DE GRADO OFERTADOS
-GRADO EN MATEMÁTICAS-
CURSO 2017-2018

	TÍTULO	TUTOR	RESUMEN
1.	ANILLOS Y MÓDULOS COHEN-MACAULAY	ANA CRISTINA LÓPEZ MARTÍN	LA TEORÍA DE MÓDULOS DE COHEN-MACAULAY SOBRE ANILLOS LOCALES NOETHERIANOS JUEGA UN PAPEL CENTRAL EN EL ÁLGEBRA CONMUTATIVA. EL OBJETIVO DE ESTE TRABAJO ES INTRODUCIR AL ESTUDIANTE EN DICHA TEORÍA Y EN SUS APLICACIONES A LA GEOMETRÍA ALGEBRAICA. SE PRETENDE TRABAJAR EN DOS LÍNEAS: ALGEBRAICAMENTE, EN LA RELACIÓN DE LOS MÓDULOS COHEN-MACAULAY CON LAS SUCESIONES DE AUSLANDER-REITEN Y, DESDE UN PUNTO DE VISTA GEOMÉTRICO, EN EL TIPO DE SINGULARIDAD QUE DEFINE EL ESPECTRO DE UN ANILLO COHEN-MACAULAY CON UN NÚMERO FINITO DE MÓDULOS COHEN-MACAULAY. SE COMENZARÁ CON LAS NOCIONES DE PROFUNDIDAD Y DIMENSIÓN PROYECTIVA DE UN MÓDULO, LA FÓRMULA (DE AUSLANDER-BUSCHBAUM) QUE RELACIONA AMBAS Y EL COMPLEJO DE KOSZUL. SE DEMOSTRARÁN LAS PROPIEDADES BÁSICAS DE LA CATEGORÍA DE MÓDULOS COHEN-MACAULAY Y DE LAS SUCESIONES DE AUSLANDER-REITEN. SE TRABAJARÁN EJEMPLOS DE ANILLOS COHEN-MACAULAY Y GORENSTEIN Y, SI FUERA POSIBLE, SE ESTUDIARÁ LA ESTRUCTURA DE DICHOS MÓDULOS SOBRE SINGULARIDADES AISLADAS DE DIMENSIÓN 1 Y 2.
2.	ALGUNOS MODELOS MATEMÁTICOS PARA LA PROPAGACIÓN DE EPIDEMIAS	MARÍA JESÚS SENOSIAIN ARAMENDÍA	EN ESTE TRABAJO SE PRETENDEN RECOGER ALGUNOS DE LOS RESULTADOS EXISTENTES LOS MODELOS BÁSICOS DE LA PROPAGACIÓN DE ENFERMEDADES INFECCIOSAS ENTRE INDIVIDUOS. ESTOS MODELOS SON EL SIS (SUSCEPTIBLE-INFECTADO-SUSCEPTIBLE) Y EL SIR (SUSCEPTIBLE-INFECTADO-RECUPERADO). POSTERIORMENTE SE ESTUDIARÁN OTROS MODELOS, QUE PRESENTAN VARIACIONES SOBRE ESTOS, COMO LOS MODELOS ANTERIORES PERO INCLUYENDO NACIMIENTOS Y MUERTES, EN DONDE UN INDIVIDUO RECOBRADO NUNCA DESARROLLA INMUNIDAD A LA ENFERMEDAD Y OTRAS EXTENSIONES (SEIS, SEIR) QUE CONSIDERA UNA NUEVA CLASE DE INDIVIDUOS E (DEL INGLÉS EXPOSED) , ES DECIR, AQUELLOS QUE PORTAN LA ENFERMEDAD PERO QUE AL HALLARSE EN SU PERIODO DE INCUBACIÓN NO MUESTRAN SÍNTOMAS Y NO ESTÁN EN CONDICIÓN DE INFECTAR A OTROS.
3.	APLICACIONES HOLOMORFAS PROPIAS ENTRE SUPERFICIES DE RIEMANN	PASCUAL CUTILLAS RIPOLL	DEBERÁ REALIZARSE EN PRIMER LUGAR UNA PRESENTACIÓN DE LOS CONCEPTOS Y RESULTADOS BÁSICOS RELACIONADOS CON LAS SUPERFICIES DE RIEMANN O SEA, LAS VARIEDADES COMPLEJAS DE DIMENSIÓN 1. DESPUÉS DE ESTO SE INTRODUCIRÁN BREVEMENTE AQUELLAS IDEAS Y RESULTADOS SOBRE LA TEORÍA DE REVESTIMIENTOS DE UNA VARIEDAD TOPOLÓGICA, CUYA PRESENTACIÓN SEA CONVENIENTE PARA PODER USARLAS EN EL RESTO DEL TRABAJO. UNA VEZ EXPUESTOS ESTOS PRELIMINARES, SE ESTUDIARÁN LAS PROPIEDADES DE LAS APLICACIONES HOLOMORFAS, PROPIAS Y NO CONSTANTES ENTRE SUPERFICIES DE RIEMANN, INCLUYENDO SU RELACIÓN CON LOS REVESTIMIENTOS RAMIFICADOS HOLOMORFOS ENTRE SUPERFICIES DE ESTE TIPO. POSTERIORMENTE SE PASARÁ A ENUNCIAR Y DEMOSTRAR EL TEOREMA DE EXTENSIÓN DE ESTA CLASE DE APLICACIONES, CUANDO LA SEGUNDA DE LAS SUPERFICIES SEA EL ABIERTO COMPLEMENTARIO DE ALGÚN SUBCONJUNTO DISCRETO DE OTRA SUPERFICIE DE RIEMANN. FINALMENTE, COMO APLICACIÓN, SE VERÁ CÓMO PUEDE DEFINIRSE DE MODO NATURAL UNA ESTRUCTURA HOLOMORFA EN EL COMPLEMENTARIO DE LOS PUNTOS SINGULARES DE UNA CURVA

			PROYECTIVA PLANA ALGEBRÁICA E IRREDUCIBLE, Y SE DEMOSTRARÁ QUE HAY UNA ÚNICA SUPERFICIE DE RIEMANN COMPACTA QUE COINCIDE CON EL CITADO COMPLEMENTARIO SALVO UN CONJUNTO FINITO DE PUNTOS.
4.	BASES EN ESPACIOS DE BANACH	ÁNGEL TOCINO GARCÍA	PARTIENDO DEL CONCEPTO DE BASE DE SCHAUDER EN UN ESPACIO DE BANACH, DE SUS PROPIEDADES ELEMENTALES Y DE EJEMPLOS BÁSICOS ESTUDIADOS EN LA ASIGNATURA ANÁLISIS FUNCIONAL SE PLANTEA EL PROBLEMA DE EXISTENCIA DE BASES BAJO DIFERENTES SUPUESTOS. NUEVOS CONCEPTOS COMO LOS DE SUCESIÓN BÁSICA, BASES EQUIVALENTES, BASES INCONDICIONALES, SISTEMAS BIORTOGONALES, ETC. PERMITEN ABORDAR RESULTADOS QUE RESPONDEN ALGUNAS DE LAS CUESTIONES, YA QUE OTRAS PERMANECEN SIN RESOLVER. SE ESTUDIA TAMBIÉN LA RELACIÓN DE LA EXISTENCIA DE BASES EN UN ESPACIO Y SU DUAL, GENERALIZANDO EL ESTUDIO AL CASO DE BASES DEFINIDAS CON TOPOLOGÍAS DIFERENTES A LA DE LA NORMA.
5.	ÁLGEBRAS DE FROBENIUS: UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS TOPOLÓGICA DE 2 DIMENSIONES	DANIEL HERNÁNDEZ SERRANO	EL TRABAJO PRETENDE INTRODUCIR AL ESTUDIANTE EN LA TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS TOPOLÓGICA DE 2-DIMENSIONES (2DTQFT) DESDE UN PUNTO DE VISTA PURAMENTE MATEMÁTICO. LA MOTIVACIÓN Ń ES LA EXISTENCIA DE UNA EQUIVALENCIA ENTRE LA CATEGORÍA DE 2DTQFT Y LA DE ÁLGEBRAS DE FROBENIUS CONMUTATIVAS. NO SE PRETENDE QUE EL ESTUDIANTE HAGA UN ESTUDIO PROFUNDO DE ESTE EQUIVALENCIA, SINO DE QUE APRENDA CON RIGOR LAS ÁLGEBRAS DE FROBENIUS Y SEA CAPAZ DE ILUSTRAR LA IDEA DE ESTA EQUIVALENCIA DEFINIENDO MATEMÁTICAMENTE QUÉ SE ENTIENDE POR UNA 2DTQFT. EL ESTUDIANTE DEBERÁ HACER UN BREVE REPASO DE ÁLGEBRA LINEAL Y ÁLGEBRA TENSORIAL, RECORDAR LA NOCIÓN DE ÁLGEBRA Y APRENDER LA DE COÁLGEBRA, HACER UN BREVE ESTUDIO DE DEFINICIONES BÁSICAS DE MÓDULOS PARA CON ELLO SER CAPAZ DE DEFINIR LAS ÁLGEBRAS DE FROBENIUS, DAR SUS PROPIEDADES Y EXPRESAR DICHAS PROPIEDADES EN TÉRMINOS DE SUPERFICIES TOPOLÓGICAS, QUE DEBERÁ DEFINIR TAMBIÉN CON RIGOR. FINALMENTE, HA DE SER CAPAZ DE APRENDER Y EXPLICAR NOCIONES BÁSICAS DEL LENGUAJE CATEGORIAL Y FUNCTORIAL PARA DAR SUCINTAMENTE LA IDEA QUE MOTIVA ESTE TRABAJO.
6.	CLASIFICACIÓN DE ISOMETRÍAS	Mª TERESA SANCHO DE SALAS	EN ESTE TRABAJO SE PRETENDE DAR LA CLASIFICACIÓN DE LAS ISOMETRÍAS DE UN ESPACIO VECTORIAL MÓDULO LA CONJUGACIÓN POR ISOMETRÍAS. LA PRIMERA PARTE CONSISTIRÁ EN DAR UNA INTRODUCCIÓN DE LOS CONCEPTOS NECESARIOS Y PROPIEDADES ELEMENTALES. ASÍ MISMO SE DARÁ EL TEOREMA QUE DA LA EQUIVALENCIA ENTRE ISOMETRÍAS EN UN K-ESPACIO VECTORIAL Y MÉTRICAS HERMÍTICAS SOBRE UN ANILLO. LA SEGUNDA PARTE CONSISTIRÁ EN DAR EL TEOREMA DE CLASIFICACIÓN DIVIDIÉNDOLO EN TRES TEOREMAS DE DESCOMPOSICIÓN, INVARIANTES Y FORMAS CANÓNICAS. LA TERCERA PARTE CONSISTIRÁ EN DAR UNA DESCRIPCIÓN DETALLADA DE LA CLASIFICACIÓN EN EL CUERPO DE LOS NÚMEROS REALES Y LOS CUERPOS FINITOS.
7.	SUPERFICIES MÍNIMAS, REPRESENTACIÓN DE WEIERSTRASS	PABLO M. CHACÓN	EL ESTUDIO DE LAS SUPERFICIES MÍNIMAS DEL ESPACIO EUCLÍDEO FORMA PARTE DE LA GEOMETRÍA DIFERENCIAL CLÁSICA, PRÁCTICAMENTE DESDE SUS INICIOS. SE PUEDE CONSIDERAR QUE EL PROBLEMA INICIAL ES DETERMINAR GRAFOS SOBRE DOMINIOS DEL PLANO R2 CON LA MENOR ÁREA POSIBLE Y CON VALORES PREFIJADOS EN LA FRONTERA DEL DOMINIO. CON ESTE PLANTEAMIENTO, LAS SUPERFICIES MÍNIMAS SON SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN EN DERIVADAS PARCIALES NO LINEAL Y

			ELÍPITICA. CON POSTERIORIDAD, LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE ESTAS SOLUCIONES LLEVÓ A AMPLIAR LA DEFINICIÓN DE SUPERFICIE MÍNIMA COMO AQUELLAS CUYA CURVATURA MEDIA ES IDÉNTICAMENTE CERO. PARA ESTE TRABAJO DE FIN DE GRADO SE PROPONE REVISAR LAS PROPIEDADES INICIALES Y LOS EJEMPLOS CLÁSICOS DE SUPERFICIES MÍNIMAS, CON UN ESTUDIO DETALLADO DE LA APLICACIÓN DE GAUSS DE LA SUPERFICIE. EN PARTICULAR, LA LLAMADA REPRESENTACIÓN DE ENNEPER-WEIERSTRASS ESTABLECE UNA FUERTE RELACIÓN ENTRE LAS SUPERFICIES MÍNIMAS Y EL ANÁLISIS COMPLEJO. FUE OSSERMAN EN LOS AÑOS 60 QUIEN RETOMÓ ESTAS TÉCNICAS DANDO UN GRAN IMPULSO A LA TEORÍA DE SUPERFICIES MÍNIMAS COMPLETAS. CON POSTERIORIDAD, EL EJEMPLO DESCUBIERTO POR COSTA HACIENDO USO DE LA REPRESENTACIÓN DE ENNEPER-WEIERTRASS SUPUSO EL INICIO DE LA BÚSQUEDA DE NUEVOS EJEMPLOS Y CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES MÍNIMAS CON GEOMETRÍA PRESCRITA. ES POR TANTO TAMBIÉN UN OBJETIVO DE ESTA PROPUESTA DE TRABAJO DE FIN DE GRADO EL INICIARSE ESTE TIPO DE TÉCNICAS. UNA VEZ ALCANZADO EL NÚCLEO DE LA PROPUESTA AQUÍ DESCRITO, EL INTERÉS DEL ESTUDIANTE PUEDE ENCAMINAR EL TRABAJO A UN ANÁLISIS MÁS PROFUNDO DE OTRO TIPO DE PROPIEDADES (CURVATURA TOTAL, TEOREMAS DE CLASIFICACIÓN...), APLICACIONES, GENERALIZACIONES A OTROS ESPACIOS AMBIENTES U OTRAS DIMENSIONES, ETC. PARA EL DESARROLLO DE ESTA PROPUESTA SE RECOMIENDA HABER CURSADO LAS ASIGNATURAS GEOMETRÍA DIFERENCIAL II Y ANÁLISIS COMPLEJO II.
8.	JACOBIANAS DE LAS CURVAS ALGEBRAICAS.	JOSÉ MARÍA MUÑOZ PORRAS	EN ESTE TRABAJO SE DESCRIBIRÁ LOS RESULTADOS QUE PERMITEN CLASIFICAR LOS DIVISORES DE UNA CURVA ALGEBRAICA MÓDULO LA EQUIVALENCIA LINEAL. SE PRETENDE QUE SE COMPRENDAN LAS DOS LÍNEAS CLÁSICAS DE CONSTRUCCIÓN: LA ANALÍTICA Y LA ALGEBRAICA. TAMBIÉN SE ESTUDIARÁN ALGUNOS PROBLEMAS CLÁSICOS COMO EL MORFISMO DE ABEL (INTEGRALES ABELIANAS). UN ÍNDICE DEL TRABAJO PODRÍA SER EL SIGUIENTE: PRODUCTOS SIMÉTRICOS DE CURVAS Y CLASIFICACIÓN DE DIVISORES EFECTIVOS, CONSTRUCCIÓN ANALÍTICA DE LAS JACOBIANAS DE SUPERFICIES DE RIEMANN COMPACTAS, CONSTRUCCIÓN ALGEBRAICA DE LAS JACOBIANAS DE CURVAS ALGEBRAICAS, E INTEGRALES ABELIANAS.
9.	REVESTIMIENTOS CÍCLICOS DE CURVAS NO SINGULARES	ESTEBAN GÓMEZ GONZÁLEZ	TODA CURVA CON GRUPO DE AUTOMORFISMOS NO TRIVIAL PUEDE SER RECUPERADA COMO UN REVESTIMIENTO CÍCLICO ENTRE CURVAS LISAS. SE PROPONE REALIZAR UN ESTUDIO DE TALES REVESTIMIENTOS, HASTA ALCANZAR UNA EQUIVALENCIA ENTRE REVESTIMIENTOS CÍCLICOS DE GRADO DISTINTO DE LA CARACTERÍSTICA DEL CUERPO BASE Y UNOS DATOS DE CONSTRUCCIÓN SOBRE LA CURVA BASE; CONCRETAMENTE, UN DIVISOR EFECTIVO Y UN HAZ DE LÍNEA VERIFICANDO CIERTAS CONDICIONES. DICHA EQUIVALENCIA ES TOTALMENTE EXPLÍCITA Y CONSTRUCTIVA LO CUAL PERMITE DAR LA ESTRUCTURA LOCAL Y GLOBAL DEL REVESTIMIENTO A PARTIR DE LOS DATOS DE CONSTRUCCIÓN. ADEMÁS SE PUEDE DETERMINAR, EN FUNCIÓN DE LOS DATOS DE CONSTRUCCIÓN DEL REVESTIMIENTO, LAS PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DEL REVESTIMIENTO Y DETERMINAR LOS ISOMORFISMOS ENTRE ELLOS. ESTO PERMITE GENERALIZAR LA CONSTRUCCIÓN AL CASO RELATIVO Y DEDUCIR EL TEOREMA DE EQUIVALENCIA DE DATOS DE CONSTRUCCIÓN DADO POR CORNALBA A PARTIR DEL CÁLCULO LOCAL DEL REVESTIMIENTO. EN EL CASO DE QUE EL ESTUDIANTE ESTÉ INTERESADO, SE PUEDE ESTUDIAR LA RELACIÓN QUE EXISTE ENTRE LOS DATOS DE CONSTRUCCIÓN DADOS Y LA TEORÍA DE GRUPOS FUCHSIANOS.
10.	ESQUEMAS PROYECTIVOS	FERNANDO SANCHO DE SALAS	SE TRATA DE DAR LA CONSTRUCCIÓN DEL ESQUEMA PROYECTIVO ASOCIADO A UN ÁLGEBRA GRADUADA, EN PARTICULAR EL ESQUEMA ESPACIO PROYECTIVO. SEGUIDAMENTE SE ESTUDIARÁN LOS HACES QUASI-COHERENTES Y COHERENTES SOBRE UN

			ESQUEMA PROYECTIVO. SE ESTUDIARÁ EL FUNCTOR DE PUNTOS DEL ESPACIO PROYECTIVO. LA SEGUNDA PARTE CONSISTIRÁ EN DAR LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES SOBRE LA COHOMOLOGÍA DE LOS HACES COHERENTES DE UN ESQUEMA PROYECTIVO (TEOREMAS DE FINITUD, TEOREMAS DE ANULACIÓN, ETC), HACIENDO UN ESTUDIO MÁS PARTICULAR DE LA COHOMOLOGÍA DEL ESPACIO PROYECTIVO.
11.	INTEGRACIÓN DE FUNCIONES CON VALORES EN UN ESPACIO DE BANACH	MERCEDES MALDONADO CORDERO	EN ESTE TRABAJO SE PRETENDEN RECOGER ALGUNOS DE LOS RESULTADOS EXISTENTES SOBRE LOS DISTINTOS TIPOS DE INTEGRALES QUE EXTIENDEN LA INTEGRAL DE LEBESGUE A FUNCIONES CON VALORES EN UN ESPACIO DE BANACH. SE REALIZARÁ UN ESTUDIO PREVIO SOBRE SERIES EN ESPACIOS DE BANACH, MEDIDAS VECTORIALES Y MEDIBILIDAD EN ESPACIOS DE BANACH. POSTERIORMENTE SE DEFINIRÁN ALGUNAS INTEGRALES DE FUNCIONES CON VALORES EN UN ESPACIO DE BANACH: • LA INTEGRAL DE PETTIS O INTEGRAL DE GELFAND-PETTIS , LLAMADA INTEGRAL DÉBIL, DADO QUE ESTÁ DEFINIDA UTILIZANDO EL DUAL DEL ESPACIO DE BANACH. • LA INTEGRAL DE BOCHNER, DEFINIDA COMO EL LÍMITE DE FUNCIONES SIMPLES Y CONOCIDA COMO INTEGRAL FUERTE. ES MUY UTILIZADA EN LA TEORÍA DE LOS ESPACIOS DE BANACH. • LA INTEGRAL DE BIRKHOFF, QUE SURGE DE LA INTERPRETACIÓN DE FRÉCHET DE LA INTEGRAL DE LEBESGUE, EN LA QUE SE REEMPLAZAN (EN LA DEFINICIÓN DE INTEGRAL DE RIEMMAN) LOS INTERVALOS POR CONJUNTOS MEDIBLES ARBITRARIOS Y SE CONSIDERAN PARTICIONES NUMERABLES EN LUGAR DE PARTICIONES FINITAS. ASÍ, EN EL CASO DE FUNCIONES VECTORIALES, SE UTILIZAN PARTICIONES NUMERABLES DEL ESPACIO DE PARTIDA Y SERIES INCONDICIONALMENTE CONVERGENTES. FINALMENTE SE ESTUDIARÁ LA RELACIÓN ENTRE LAS DISTINTAS INTEGRALES DEFINIDAS.
12.	ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE LOS GRUPOS LINEALES	CARLOS SANCHO DE SALAS	SE TRATA DE DAR UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA GENERAL DE LOS GRUPOS LINEALES (GRUPOS DE MATRICES). EL TRABAJO CONSISTIRÁ EN DAR LAS DEFINICIONES DE LOS OBJETOS NATURALES ASOCIADOS A UN GRUPO: SUS FUNCIONES, ÁLGEBRA ENVOLVENTE, ÁLGEBRA DE LIE, ETC., ASÍ COMO SUS PROPIEDADES Y RELACIONES, PARA LUEGO APLICARLO A HACER MÁS NATURAL Y CLARA LO QUE HA SIDO SU UTILIZACIÓN EN MULTITUD DE CUESTIONES EN LAS QUE HA APARECIDO A LO LARGO DEL GRADO EN MATEMÁTICAS. CASI TODAS ESTAS APLICACIONES RESULTARÁN DEL ESTUDIO ELEMENTAL DEL ÁLGEBRA ENVOLVENTE DEL GRUPO, CON ESPECIAL HINCAPIÉ EN LOS CONMUTATIVOS Y MÁS GENERALMENTE EN LOS RESOLUBLES.
13.	CAMPOS DE JACOBI EN VARIEDADES RIEMANNIANAS.	ANTONIO LÓPEZ ALMOROX	EL PRESENTE TRABAJO FIN DE GRADO SE ENMARCA DENTRO DE LA GEOMETRÍA RIEMANNIANA Y PROFUNDIZA EN LA RELACIÓN ENTRE LA TOPOLOGÍA DE UNA VARIEDAD RIEMANNIANA Y LOS DIFERENTES TENSORES DE CURVATURA ASOCIADOS A LA CONEXIÓN RIEMANNIANA. LA PROPUESTA QUE SE HACE ES ANALIZAR DICHA RELACIÓN A TRAVÉS DE LOS LLAMADOS CAMPOS DE JACOBI. LOS CAMPOS DE JACOBI SON CAMPOS VECTORIALES CON SOPORTE EN CURVAS GEODÉSICAS DE UNA VARIEDAD RIEMANNIANA QUE VERIFICAN UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA DE SEGUNDO ORDEN LINEAL QUE IMPLICA AL TENSOR DE CURVATURA (ECUACIÓN DE JACOBI). ENTENDIDOS COMO CAMPOS VARIACIONALES, LA ANTERIOR ECUACIÓN PERMITE COMPROBAR QUE LOS CAMPOS DE JACOBI TRANSFORMAN CURVAS GEODÉSICAS EN CURVAS GEODÉSICAS PERMITIENDO DESCRIBIR LAS DIFERENCIAS ENTRE GEODÉSICAS SUFICIENTEMENTE CERCANAS ENTRE SÍ A TRAVÉS DEL TENSOR DE CURVATURA (DESVIACIÓN GEODÉSICA).

			CON ELLO ES POSIBLE EXTRAER INFORMACIÓN TOPOLÓGICA GLOBAL NO TRIVIAL SOBRE LA VARIEDAD RIEMANNIANA. EL TRABAJO QUE SE PROPONE ES UN TRABAJO DE REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA E INVESTIGACIÓN SOBRE LOS CAMPOS DE JACOBI DEFINIDOS EN VARIEDADES RIEMANNIANAS. EL OBJETIVO FUNDAMENTAL ES ANALIZAR LOS ASPECTOS Y PROPIEDADES DE DICHOS CAMPOS VARIACIONALES GEODÉSICOS Y SU RELACIÓN CON LAS PROPIEDADES TOPOLÓGICAS DE LA VARIEDAD RIEMANNIANAA TRAVÉS DEL TENSOR DE CURVATURA. EL ESTUDIANTE DEBERÁ INICIALMENTE ANALIZAR LAS PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DEL DENOMINADO FLUJO GEODÉSICO DE UNA VARIEDAD RIEMANNIANA A TRAVÉS DE LA APLICACIÓN EXPONENCIAL. DE PARTICULAR INTERÉS SERÁ LA DETERMINACIÓN EXPLÍCITA DE DICHO FLUJO EN CIERTOS MODELOS DE VARIEDADES DE CURVATURA SECCIONAL CONSTANTE. POR LAS CONSECUENCIAS POSTERIORES EN LA OBTENCIÓN DE RESULTADOS GLOBALES, SE ANALIZARÁ EL LLAMADO LEMA DE GAUS ASÍ COMO LAS POSIBLES SINGULARIDADES DE LA APLICACIÓN EXPONENCIAL Y SU POSTERIOR RELACIÓN CON LOS PUNTOS CONJUGADOS DE LOS CAMPOS DE JACOBI. EL ESTUDIANTE DEBERÁ COMPRENDER GEOMÉTRICAMENTE LA NOCIÓN DE CAMPO DE JACOBI Y SU RELACIÓN CON LA CURVATURA DE RIERMANN O LAS VARIACIONES GEODÉSICAS. DEBERÁ ESTUDIAR LA ESTRUCTURA DE LAS SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DE JACOBI Y SUS PROPIEDADES CON OBJETO DETERMINAR EXPLÍCITAMENTE LOS CAMPOS DE JACOBI DE LAS VARIEDADES RIEMANNIANAS DE CURVATURA SECCIONAL CONSTANTE. SE ANALIZARÁ, MEDIANTE DICHOS CAMPO, CÓMO LA CURVATURA SECCIONAL GOBIERNA LA VELOCIDAD A LAS QUE LAS GEODÉSICAS RADIALES EN UN PUNTO SE DISPERSAN (DESVIACIÓN GEODÉSICA). COMO PARTE DEL OBJETIVO FUNDAMENTAL, SE ESTUDIARÁ EL TEOREMA DE CARTAN-AMBROSE-SINGER SOBRE LOS MODELOS DE VARIEDADES RIEMANNIANAS DE CURVATURA SECCIONAL CONSTANTE COMPLETAS CONEXAS Y SIMPLEMENTE CONEXAS ASÍ COMO OTROS RESULTADOS GLOBALES SOBRE VARIEDADES RIEMANNIANAS DE CURVATURA NEGATIVA. POR ÚLTIMO Y DEPENDIENDO DEL DESARROLLO DEL PROGRAMA ANTERIOR, EL ESTUDIANTE PODRÁ PROFUNDIZAR EN LA RELACIÓN ENTRE LOS CAMPOS DE JACOBI Y LAS FÓRMULAS DE VARIACIÓN DE LA ENERGÍA ASÍ COMO EN SU APLICACIÓN AL ESTUDIO DE ALGÚN RESULTADO GLOBAL CLÁSICO (TEOREMAS DE CARTAN-HADAMARD O TEOREMA DE MYERS) DE GEOMETRÍA RIEMANNIANA.
14.	**TEORÍA K ALGEBRAICA Y SÍMBOLOS ARITMÉTICOS**	FERNANDO PABLOS ROMO	EL OBJETIVO INICIAL DE ESTE TRABAJO DE FIN DE GRADO ES REALIZAR UNA REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA RIGUROSA DE LAS NOCIONES Y PROPIEDADES DE LOS GRUPOS K_0 (F), K_1(F) Y K_2(F) DE UN CUERPO Y UNA APROXIMACIÓN A LOS GRUPOS K_N(F) PARA N>2. ASIMISMO SE ESTUDIARÁN PROPIEDADES BÁSICAS DE GRUPOS DE TEORÍA K ALGEBRAICA ASOCIADOS A ANILLOS ARTINIANOS. LA SEGUNDA PARTE DEL TFG SE DEDICARÁ A ESTUDIAR SÍMBOLOS ARITMÉTICOS DE STEINBERG Y SU INTERPRETACIÓN COMO MORFISMOS EN EL ÁMBITO DE LA TEORÍA K ALGEBRAICA, ESPECIALMENTE EL SÍMBOLO MODERADO, EL SÍMBOLO ARITMÉTICO DE HILBERT Y EL SÍMBOLO DE CONTOU-CARRERE. IGUALMENTE SE ANALIZARÁN EN ESTE CONTEXTO LAS LEYES DE RECIPROCIDAD ASOCIADAS A ESTOS SÍMBOLOS.
15.	**FUNCIONES HOLOMORFAS DE VARIAS VARIABLES**	JESÚS RODRÍGUEZ LOMBARDERO	SE TRATA DE ESTUDIAR LA PARTE MÁS ELEMENTAL DE LA TEORÍA DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES COMPLEJAS Y EXTENDER LOS CONCEPTOS BIEN CONOCIDOS SOBRE FUNCIONES HOLOMORFAS EN EL PLANO: FUNCIÓN ANALÍTICA, ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN, FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY, ETC. ES FÁCIL DEMOSTRAR QUE UNA FUNCIÓN CONTINUA Y SEPARADAMENTE HOLOMORFA EN CADA VARIABLE ES HOLOMORFA; EL TEOREMA DE HARTOGS ASEGURA QUE LA CONDICIÓN DE CONTINUIDAD ES SUPERFLUA, AUNQUE SU DEMOSTRACIÓN REQUIERE ALGO DE TRABAJO. CON EL ESTUDIO DE LAS SINGULARIDADES Y LA

			PROLONGACIÓN ANALÍTICA SE APRECIARÁN NOTABLES DIFERENCIAS ENTRE LA TEORÍA DE FUNCIONES DE UNA Y VARIAS VARIABLES; POR EJEMPLO, EL CIERRE DEL CONJUNTO DE SINGULARIDADES DE UNA FUNCIÓN ANALÍTICA DE MÁS DE UNA VARIABLE NO PUEDE SER COMPACTO; EN PARTICULAR TODA SINGULARIDAD AISLADA ES EVITABLE, EN CONTRASTE CON LO QUE OCURRE CON LAS FUNCIONES DE UNA VARIABLE. EN ESTE CONTEXTO APARECEN LOS DOMINIOS DE HOLOMORFÍA, DOMINIOS EN LOS QUE EXISTE ALGUNA FUNCIÓN HOLOMORFA QUE NO SE PUEDE EXTENDER A UNA REGIÓN MAYOR. TODO SUBCONJUNTO ABIERTO DEL PLANO COMPLEJO ES UN DOMINIO DE HOLOMORFÍA; PERO ESTA AFIRMACIÓN YA NO ES CIERTA PARA FUNCIONES DE MÁS DE UNA VARIABLE. EL TRABAJO QUE SE PROPONE CONSISTE EN EL ESTUDIO DE LOS TEMAS EXPUESTOS, LO QUE SERVIRÁ DE BASE PARA ESTUDIOS POSTERIORES SOBRE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES COMPLEJAS (PROPIEDADES ALGEBRAICAS DEL HAZ DE GÉRMENES DE FUNCIONES HOLOMORFAS EN UN PUNTO O VARIEDADES DE STEIN).
16.	CONDICIONES DE ESCISIÓN PARA FIBRADOS VECTORIALES EN EL ESPACIO PROYECTIVO.	DARÍO SÁNCHEZ GÓMEZ	EL OBJETIVO DEL TRABAJO ES INTRODUCIR AL ESTUDIANTE EN EL PROBLEMA DE DETERMINAR BAJO QUÉ CIRCUNSTANCIAS UN FIBRADO VECTORIAL EN EL ESPACIO PROYECTIVO DESCOMPONE COMO SUMA DIRECTA DE FIBRADOS DE LÍNEA. PARA ELLO EL ESTUDIANTE DEBERÁ FAMILIARIZARSE CON LAS NOCIONES Y ALGUNAS PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS FIBRADOS VECTORIALES Y DE LOS FIBRADOS PROYECTIVOS. ADEMÁS SE REALIZARÁ UN TRABAJO DE REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA DE LOS RESULTADOS CONOCIDOS MÁS RELEVANTES SOBRE DICHO PROBLEMA COMO SON LA CLASIFICACIÓN DE LOS FIBRADOS VECTORIALES EN LA RECTA PROYECTIVA DADA POR GROTHENDIECK Y EL CRITERIO DE ESCISIÓN DE HORROCKS.
17.	SISTEMAS DE EDP LINEALES HIPERBÓLICOS SIMÉTRICOS Y APLICACIONES	RICARDO J. ALONSO BLANCO	LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES LINEALES HIPERBÓLICOS DE PRIMER ORDEN SIMÉTRICOS RIGEN EL COMPORTAMIENTO DE IMPORTANTES MODELOS FÍSICOS. SE TRATA DE ESTUDIAR EL PROBLEMA DE CAUCHY O DE CONDICIONES INICIALES PARA TALES SISTEMAS Y DEMOSTRAR LA EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES BAJO HIPÓTESIS ADECUADAS. EL DESARROLLO DEL TRABAJO, ADEMÁS DE CUESTIONES BÁSICAS SOBRE ECUACIONES DIFERENCIALES, IMPLICARÁ EL MANEJO DE ALGUNOS ESPACIOS DE FUNCIONES DEL TIPO L^P, SOBOLEV, ETC. EN LA MEDIDA DE LO POSIBLE SE ILUSTRARÁ LA TEORÍA CON APLICACIONES CONCRETAS TOMADAS DE LA FÍSICA.
18.	PROBLEMA INVERSO DE GALOIS	FRANCISCO JOSÉ PLAZA MARTÍN	ESTA PROPUESTA DE TFG ABORDA EL PROBLEMA INVERSO DE GALOIS; ES DECIR, DADO UN GRUPO, DETERMINAR SI ES REALIZABLE COMO GRUPO DE GALOIS DE UNA EXTENSIÓN. A PARTIR DE AQUÍ, SE PLANTEA LA CONSTRUCCIÓN EXPLÍCITA Y LA CLASIFICACIÓN DE ESTAS EXTENSIONES, POR UN LADO, Y SUS VERSIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS POR OTRO. EN ESTE CASO, TRAS UNA BREVE APROXIMACIÓN AL PROBLEMA Y EN FUNCIÓN DE LA FORMACIÓN DEL ESTUDIANTE, SE ESTUDIARÁN MÉTODOS EXPLÍCITOS DE CONSTRUCCIÓN DE ESTAS EXTENSIONES O BIEN SU RELACIÓN CON LOS REVESTIMIENTOS DE CURVAS ALGEBRAICAS Y LOS ESPACIOS DE HURWITZ.
19.	EL TEOREMA DE SARKOVSKII	LUIS MANUEL NAVAS VICENTE	SI ALGUNA VEZ EL LECTOR SE HA ENTRETENIDO CON UNA CALCULADORA CIENTÍFICA APRETANDO COMPULSIVAMENTE LA TECLA CORRESPONDIENTE A ALGUNA FUNCIÓN, POR EJEMPLO, UNA TRIGONOMÉTRICA, SE HABRÁ SEGURAMENTE FIJADO QUE LOS NÚMEROS QUE APARECEN EN LA PANTALLA A VECES SE ACERCAN A ALGÚN VALOR (SEN, COS) Y A VECES PARECE QUE CAMBIAN AL AZAR (TG, CTG). MATEMÁTICAMENTE, ESTO SE MODELA POR UNA FUNCIÓN $f: X \to X$ SOBRE UN CONJUNTO X, UN PUNTO INICIAL x Y SUS *ITERACIONES BAJO* f, O SEA, LAS IMÁGENES $f(x), f(f(x)), f\left(f(f(x))\right), \ldots$ QUE RESULTAN AL APLICAR f Á x UN NÚMERO ARBITRARIO n DE VECES. AL CONJUNTO DE TODAS LAS ITERACIONES $(f \circ f \circ \cdots \circ f)(x)$ DE UN x LO LLAMAMOS SU *ÓRBITA FUTURA*. ESTE TIPO DE PROCESO SE CONOCE COMO *SISTEMA DINÁMICO DISCRETO.*

DESDE UN PUNTO DE VISTA FÍSICO, IMAGINAMOS QUE x SE «MUEVE» POR EL ESPACIO X «IMPULSADO» POR f. HAY OTRAS METÁFORAS INTERESANTES QUE EXPLICAN LA UNIVERSALIDAD DEL CONCEPTO. A VECES, AL PUNTO x SE LLAMA LA «SEMILLA» Y ENTONCES LA ÓRBITA FUTURA ES LA «COSECHA». EN LAS CIENCIAS BIOLÓGICAS, f REPRESENTA UNA LEY DE *EVOLUCIÓN* DEL SISTEMA A PARTIR DE UN ESTADO INICIAL x Y LA ÓRBITA ES LA HISTORIA COMPLETA DE SUS TRANSFORMACIONES. POR LO QUE REPRESENTA DE PREDICCIÓN DEL FUTURO, EL LECTOR INTUIRÁ QUE ES DE GRAN INTERÉS ESTUDIAR LAS ÓRBITAS EN TALES SISTEMAS. CONSTATAMOS ALGUNOS FENÓMENOS BÁSICOS.

UN *PUNTO FIJO* DE f ES UN PUNTO QUE NO CAMBIA AL APLICAR LA FUNCIÓN f, O SEA, $f(x) = x$. POR EJEMPLO, $x = 0$ ES FIJO PARA LA FUNCIÓN SENO Y $x = 1$ ES FIJO TANTO PARA $f(x) = 1/x$ COMO PARA $f(x) = \sqrt{x}$. LA ÓRBITA DE UN PUNTO FIJO NO ES MUY INTERESANTE: ES OBVIAMENTE LA SUCESIÓN CONSTANTE $x, x, x, \ldots$. EL PUNTO «NO SE MUEVE».

A PROPÓSITO DE ESTO, DEBEMOS DISTINGUIR LA ÓRBITA, QUE ES LA *SUCESIÓN ORDENADA* DE LAS ITERACIONES, SIEMPRE INFINITA, DE SU *CONJUNTO IMAGEN*, QUE CONSTA DE LOS *PUNTOS DISTINTOS* QUE CONTIENE, Y QUE PODRÍA SER FINITO, COMO EN EL CASO DE UN PUNTO FIJO, AUNQUE EN LA PRÁCTICA ESTA DISTINCIÓN SE DIFUMINA.

UN *PUNTO PERIÓDICO* DE f ES AQUEL AL QUE SE VUELVE TRAS UN CIERTO NÚMERO DE ITERACIONES n DE f, SIENDO EL MENOR TAL n SU *ORDEN*. UN PUNTO FIJO ES POR TANTO LO MISMO QUE UN PUNTO PERIÓDICO DE ORDEN 1. POR EJEMPLO, CUALQUIER $x \neq 0$ ES PERIÓDICO DE ORDEN 2 PARA $f(x) = -x$ SOBRE $\mathbb{R}$, MIENTRAS QUE $x = 0$ ES UN PUNTO FIJO. LOS PUNTOS PERIÓDICOS DE ORDEN n TIENEN ÓRBITAS PERIÓDICAS DE LA FORMA $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ QUE SON LA REPETICIÓN DE UN *BUCLE* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ DE PERÍODO n. CUALQUIER PUNTO DE UN BUCLE DE PERÍODO n ES TAMBIÉN PERIÓDICO DE ORDEN n Y SIRVE IGUALMENTE PARA DESCRIBIR EL BUCLE EMPEZANDO EN ESE PUNTO. POR TANTO, DESCRIBIR LOS PUNTOS PERIÓDICOS ES LO MISMO QUE DESCRIBIR LOS BUCLES.

UN PUNTO ES *EVENTUALMENTE PERIÓDICO* SI ALGUNA ITERACIÓN SUYA ES PERIÓDICA. DICHO DE OTRA MANERA, SIN TENER QUE SER NECESARIAMENTE PERIÓDICO, SU ÓRBITA *ENTRA* EVENTUALMENTE EN UN BUCLE PERIÓDICO, QUE A PARTIR DE ENTONCES SE REPETIRÁ INDEFINIDAMENTE. LOS PUNTOS PERIÓDICOS Y EVENTUALMENTE PERIÓDICOS SE CARACTERIZAN POR TENER ÓRBITAS *FINITAS,* EN EL SENTIDO DEL CONJUNTO IMAGEN, ES DECIR, SÓLO «VISITAN» UN NÚMERO FINITO DE PUNTOS.

VEAMOS UN EJEMPLO MENOS TRIVIAL DE ESTOS CONCEPTOS. SEA $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ LA FUNCIÓN QUE A UN NATURAL n LE ASOCIA LA SUMA DE LOS CUBOS DE SUS DÍGITOS DECIMALES. POR EJEMPLO, $f(2017) = 2^3 + 0^3 + 1^3 + 7^3 = 352$. SE PUEDE COMPROBAR FÁCILMENTE QUE $f(352) = 160$, $f(160) = 217$ Y $f(217) = 352$, CON LO CUAL LA ÓRBITA DE 2017 ENTRA EN EL BUCLE $(352, 160, 217)$ DE PERÍODO 3. DE HECHO, f TIENE 5 PUNTOS FIJOS: $1, 153, 370, 371$ Y 407, DOS BUCLES DE PERÍODO 2: $(136, 244)$ Y $(919, 1459)$, Y TRES BUCLES DE PERÍODO 3: EL ANTERIORMENTE MENCIONADO $(352, 160, 217)$ Y $(55, 250, 133)$. TODO NATURAL n ES EVENTUALMENTE PERIÓDICO Y SU ÓRBITA ENTRA EVENTUALMENTE EN UNO DE ESTOS BUCLES, AUNQUE NO ES FÁCIL DETERMINAR, DADO n, EN CUÁL DE LOS BUCLES ENTRARÁ.

EN GENERAL, EN UN SISTEMA DINÁMICO HABRÁ PUNTOS QUE NO SERÁN NADA DE LO ANTERIOR. POR EJEMPLO, LA *RAZÓN ÁUREA* $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ES EL ÚNICO PUNTO FIJO, Y DE HECHO EL ÚNICO PERIÓDICO, DE $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ SOBRE $X = (0, \infty)$. LOS DEMÁS PUNTOS $x > 0$ CON $x \neq \varphi$ TIENEN ÓRBITAS INFINITAS COMO CONJUNTOS, PERO SUS ITERACIONES n-ÉSIMA $(f \circ f \circ \cdots \circ f)(x)$ *TIENDEN* Á φ CUANDO $n \to \infty$. ESTA SITUACIÓN SE DESCRIBE DICIENDO QUE φ ES UN PUNTO FIJO *ATRACTOR,* YA QUE LA ÓRBITA DE CUALQUIER PUNTO CERCANO PERO DISTINTO DE ÉL «CAE» EN φ, ALGO ASÍ COMO LA MATERIA CERCANA A UN AGUJERO NEGRO EN ASTROFÍSICA, PERO ASINTÓTICAMENTE, ES DECIR, EN EL *LÍMITE*, SIN ALCANZARLO NUNCA EN UN NÚMERO FINITO DE PASOS. EN PARTICULAR, QUE $x = 1$ «CAIGA» HACIA φ EQUIVALE A LA FÓRMULA

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

Y, ADEMÁS, LA ÓRBITA DE $x = 1$ BAJO f CONSTA DE LOS COCIENTES DE LOS *NÚMEROS DE FIBONACCI* CONSECUTIVOS: $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$. AL NO HABER MÁS CASOS, SE PUEDE ARGUMENTAR QUE ESTE SISTEMA DINÁMICO ES MÁS SENCILLO QUE EL ANTERIOR QUE VIMOS, CON LA SUMA DE LOS CUBOS DE LOS DÍGITOS.

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJOS DE FIN DE GRADO OFERTADOS -GRADO EN MATEMÁTICAS- CURSO 2017-2018

ESTE TIPO DE EJEMPLO REVELA QUE, PARA EL ESTUDIO DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS, ES NECESARIO TENER CONOCIMIENTOS DE TODAS LAS RAMAS PRINCIPALES DE LAS MATEMÁTICAS: ÁLGEBRA, ANÁLISIS, Y GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA, PUES TODAS SON NECESARIAS PARA DESCRIBIR SU COMPORTAMIENTO.

VEAMOS OTRO EJEMPLO MUY SENCILLO, QUE NOS LLEVARÁ AL TEMA PRINCIPAL PLANTEADO. SOBRE EL PLANO, EL GIRO g POR 120 GRADOS ALREDEDOR DEL ORIGEN ES UNA APLICACIÓN CONTINUA, CON EL ORIGEN COMO ÚNICO PUNTO FIJO Y CON CUALQUIER OTRO PUNTO PERIÓDICO DE ORDEN 3, PUES CLARAMENTE GIRAR 3 VECES POR 120 GRADOS ES LO MISMO QUE GIRAR POR 360 GRADOS, QUE ES NO HACER NADA (LA FUNCIÓN IDENTIDAD).

PUES BIEN, EL ***TEOREMA DE SARKOVSKII*** DICE QUE, EN CAMBIO, SOBRE LA RECTA REAL $\mathbb{R}$, UNA APLICACIÓN CONTINUA QUE TENGA UN PUNTO PERIÓDICO DE ORDEN TRES, DEBE TENER TAMBIÉN PUNTOS PERIÓDICOS DE ***CUALQUIER*** PERIODO NATURAL, POR EJEMPLO, 2017, Ó 314159...¡! SI NOS DETENEMOS A PENSAR EN LOS EJEMPLOS ANTERIORES, NOS DAREMOS CUENTA DE LO EXTRAÑO QUE ES ESTE RESULTADO, Y NO ACERTAREMOS A ENTENDER POR QUÉ HA DE SER CIERTO.

DE HECHO, SARKOVSKII DEMOSTRÓ MUCHO MÁS. ORDENAMOS LOS NÚMEROS NATURALES DE LA SIGUIENTE MANERA:

- PRIMERO, LOS IMPARES MAYORES QUE 1, EN SU ORDEN HABITUAL: $3, 5, 7, 9, 11, \ldots$
- «DESPUÉS» DE ESTA LISTA INFINITA, LOS IMPARES POR 2: $2\cdot 3, 2\cdot 5, 2\cdot 7, 2\cdot 9, 2\cdot 11 \ldots$
- LUEGO, LOS IMPARES POR 2^2, O SEA $2^2\cdot 3, 2^2\cdot 5, 2^2\cdot 7, 2^2\cdot 9, 2^2\cdot 11 \ldots$
- LUEGO, LOS IMPARES POR 2^3, O SEA $2^3\cdot 3, 2^3\cdot 5, 2^3\cdot 7, 2^3\cdot 9, 2^3\cdot 11 \ldots$
- Y ASÍ SUCESIVAMENTE, MULTIPLICANDO LOS NÚMEROS EN LA LISTA ANTERIOR POR 2,
- HASTA QUE «AL FINAL» DE ESTA LISTA INFINITA DE LISTAS INFINITAS, ESCRIBIMOS LAS POTENCIAS DE 2 EN EL ORDEN HABITUAL ***DESCENDENTE***: $\ldots 2^n, 2^{n-1}, \ldots, 2^3, 2^2, 2, 1$.
- SARKOVSKII DEMOSTRÓ QUE, SI UN NÚMERO m VIENE ANTES QUE OTRO n EN ESTE ORDEN, Y f TIENE UN PUNTO PERIÓDICO DE ORDEN m, ENTONCES TAMBIÉN TIENE UN PUNTO PERIÓDICO DE ORDEN n. EN PARTICULAR, COMO EL 3 ES EL PRIMER NÚMERO EN ESTE ORDEN (OJO, CON ESTE ORDEN $\mathbb{N}$ ESTÁ ***TOTALMENTE*** PERO NO ***BIEN*** ORDENADO), SE DEDUCE EL RESULTADO QUE HEMOS ENUNCIADO ANTERIORMENTE. OTRA CONSECUENCIA ES QUE, SI SÓLO HAY UN NÚMERO FINITO DE PUNTOS PERIÓDICOS, ÉSTOS DEBEN TENER TODOS ORDEN UNA POTENCIA DE 2.
- ESTE SORPRENDENTE RESULTADO, PUBLICADO EN 1965 E IGNORADO EN OCCIDENTE DURANTE CASI UNA DÉCADA, SIGUE SIN SER DEMASIADO CONOCIDO POR LOS NO ESPECIALISTAS. EN PARTE ESTO SE DEBE A QUE NO TIENE UNA DEMOSTRACIÓN «INMEDIATA» O «INTUITIVA» QUE SE PUEDA EXPLICAR EN UNAS LÍNEAS, Y LOS DETALLES TÉCNICOS, SEGÚN RECONOCEN LOS PROPIOS EXPERTOS EN LA MATERIA, PUEDEN PARECER BASTANTE COMPLICADOS. NO OBSTANTE, YA HA HABIDO INTENTOS DE HACERLA MÁS COMPRENSIBLE Y ES PERFECTAMENTE ASEQUIBLE A PARTIR DE LOS CONOCIMIENTOS BÁSICOS DE CÁLCULO, ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ADQUIRIDOS EN LOS PRIMEROS CURSOS DEL GRADO EN MATEMÁTICAS, CON EL ESFUERZO DEBIDO.
- PRECISAMENTE, UN ASPECTO PRINCIPAL DEL TRABAJO PLANTEADO SERÁ, ADEMÁS DE ESTUDIAR LOS ASPECTOS GENERALES DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS, INTENTAR COMPRENDER UNA O VARIAS DEMOSTRACIONES DEL TEOREMA DE SARKOVSKII Y HACERLAS A SU VEZ COMPRENSIBLES A LOS LECTORES Y LOS OYENTES.

FINALMENTE, NO PODEMOS DEJAR DE MENCIONAR QUE EL ESTUDIO DE LAS ÓRBITAS DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS ES TODAVÍA MÁS COMPLICADO DE LO QUE INDICAN TODOS LOS EJEMPLOS Y RESULTADOS ANTERIORES, INCLUIDO EL TEOREMA DE SARKOVSKII. LA ***ECUACIÓN LOGÍSTICA***

			DISCRETA, DADA POR $f(x) = r\,x(1-x)$, ES UN EJEMPLO NOTORIO EN BIOLOGÍA, PUES MODELA LA VARIACIÓN DE LA POBLACIÓN DE UNA ESPECIE Y EXHIBE EL FAMOSO *EFECTO MARIPOSA* SEGÚN EL CUAL, UNA PEQUEÑA VARIACIÓN EN LA POBLACIÓN INICIAL PUEDE MARCAR LA DIFERENCIA ENTRE EL CRECIMIENTO ESTABLE Y LA EXTINCIÓN. EL COMPORTAMIENTO DE LA POBLACIÓN PUEDE REPETIRSE PERIÓDICAMENTE O SER «CAÓTICO», OSCILANDO SIN ORDEN APARENTE. ESTE TIPO DE FENÓMENO, LEJOS DE SER ENTELEQUIAS MATEMÁTICAS, NOS AFECTAN TANTO EN ACTIVIDADES COTIDIANAS TAN ORDINARIAS COMO ABRIR UN GRIFO, COMO EN LOS GRANDES FENÓMENOS QUE NO CONTROLAMOS, PERO EN LOS CUALES PODEMOS INFLUIR, COMO EL CLIMA. EL EFECTO MARIPOSA COMPLICA EL DEBATE SOCIAL DEL CAMBIO CLIMÁTICO SOBRE SI LA INFLUENCIA HUMANA ES «DEMASIADO PEQUEÑA» O «SUFICIENTEMENTE GRANDE». EN 1975 LI Y YORKE, APARENTEMENTE SIN CONOCER EL TEOREMA DE SARKOVSKII, LO AMPLIARON, DEMOSTRANDO QUE, BAJO LAS MISMAS HIPÓTESIS, ES DECIR, UNA FUNCIÓN CONTINUA $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CON UN PUNTO PERIÓDICO DE ORDEN 3, NO SÓLO EXISTEN PUNTOS PERIÓDICOS DE CUALQUIER ORDEN, SINO QUE HAY UN CONJUNTO NO NUMERABLE DE PUNTOS «CAÓTICOS» QUE NUNCA ACABAN EN UN CICLO PERIÓDICO, NI SON ATRAÍDOS ASINTÓTICAMENTE A UNO, SINO QUE SUS ÓRBITAS DEAMBULAN «CAÓTICAMENTE» POR LA RECTA. ESTE RESULTADO SE SUELE RESUMIR EN LA FRASE «PERÍODO 3 IMPLICA CAOS» Y HOY EN DÍA SE INCORPORA AL TEOREMA DE SARKOVSKII. SEGÚN EL INTERÉS PARTICULAR DEL ESTUDIANTE, EL TRABAJO PROPUESTO SE PUEDE AMPLIAR O ENFOCAR EN ESTOS ASPECTOS DE LA TEORÍA DEL CAOS.
20.	DECODIFICACIÓN DE CÓDIGOS ALGEBRO-GEOMÉTRICOS	JOSÉ IGNACIO IGLESIAS CURTO	LOS CÓDIGOS ALGEBRO-GEOMÉTRICOS, DEFINIDOS A PARTIR DE ELEMENTOS TALES COMO PUNTOS RACIONALES SOBRE UNA CURVA ASÍ COMO FUNCIONES SOBRE LA MISMA CUYOS CEROS Y POLOS VERIFIQUEN ALGUNA CONDICIÓN, SON UNO DE LOS EJEMPLOS MÁS CLAROS DE CÓMO UNA FUERTE ESTRUCTURA MATEMÁTICA PUEDE UTILIZARSE PARA ESTUDIAR LAS PROPIEDADES DE UN CÓDIGO ASÍ COMO PARA DESARROLLAR EFICIENTES ALGORITMOS DE DECODIFICACIÓN PARA DICHO CÓDIGO. SE CONOCEN DISTINTOS ALGORITMOS DE DECODIFICACIÓN PARA CÓDIGOS ALGEBRO-GEOMÉTRICOS, DESARROLLADOS EN FUNCIÓN DE LA CONSTRUCCIÓN CONCRETA DE CADA CÓDIGO. SIN EMBARGO, A PESAR DEL USO EFECTIVO DE LAS PROPIEDADES DEL CÓDIGO PRESENTAN DIFERENTES LIMITACIONES. EL OBJETIVO DEL PROYECTO ES ESTUDIAR LOS ALGORITMOS DE DECODIFICACIÓN PRESENTADOS PARA DISTINTOS CÓDIGOS DESDE COMIENZOS DE LOS AÑOS 80 HASTA NUESTROS DÍAS, HACIENDO HINCAPIÉ EN LOS INTENTOS DE SUPERAR LAS LIMITACIONES QUE LOS ALGORITMOS ANTERIORES PRESENTABAN ASÍ COMO EN LAS APLICACIONES DE LOS MISMOS EN LA PRÁCTICA.
21.	CLASIFICACIÓN DE FIBRACIONES EN ESPACIOS PROYECTIVOS SOBRE CURVAS ELÍPTICAS	CARLOS TEJERO PRIETO	EN ESTE TRABAJO SE ABORDARÁ LA CLASIFICACIÓN DE LAS VARIEDADES FIBRADAS EN ESPACIOS PROYECTIVOS SOBRE CURVAS ELÍPTICAS. PARA CONSEGUIR DICHO OBJETIVO SE ESTUDIARÁ LA EQUIVALENCIA DE DICHAS VARIEDADES CON LAS PROYECTIVIZACIONES DE LOS FIBRADOS VECTORIALES SOBRE LAS CURVAS ELÍPTICAS. LA OBTENCIÓN DE LA CLASIFICACIÓN SE BASARÁ DE MODO CLAVE EN LA DESCRIPCIÓN DE LOS FIBRADOS VECTORIALES SOBRE CURVAS ELÍPTICAS QUE FUE REALIZADA POR ATIYAH. EN PARTICULAR SE ANALIZARÁ EN DETALLE EL CASO DE LAS SUPERFICIES REGLADAS SOBRE LAS CURVAS ELÍPTICAS QUE CORRESPONDE AL CASO EN EL QUE LAS FIBRAS SON RECTAS PROYECTIVAS.
22.	DESARROLLO DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA PROBLEMAS OSCILATORIOS	JESÚS VIGO AGUIAR	SE TRATA DE UN TRABAJO PARA AQUELLOS ALUMNOS QUE HAYAN CURSADO ASIGNATURAS DE MÉTODOS NUMÉRICOS III Y MÉTODOS NUMÉRICOS EN FINANZAS. SE PROPONDRÁN MÉTODOS NUMÉRICOS ADAPTADOS A ECUACIONES TIPO DUFFING Y OTRO TIPO DE OSCILADORES. EL ALUMNO DEBERÁ PROGRAMAR LOS MÉTODOS INDICADOS POR EL TUTOR DE TIPO MULTIPASO RUNGE KUTTA Y ESTUDIAR EN LA MEDIDA POSIBLE SU ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA.

23.	:CLASES CARACTERÍSTICAS DE ESTRUCTURAS GEOMÉTRICAS.	ANTONIO FERNÁNDEZ MARTÍNEZ Mª TERESA DE BUSTOS MUÑOZ	L TÍTULO DE ESTE TRABAJO FIN DE GRADO SE CORRESPONDE CON LA PRIMERA SECCIÓN DEL ACLAMADO ARTÍCULO DE ATIYAH, BOTT Y PATODI "ON THE HEAT EQUATION AND THE INDEX THEOREM" EN EL CUAL SE DA UNA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DEL ÍNDICE UTILIZANDO LAS CLASES CARACTERÍSTICAS DE OPERADORES DIFERENCIALES EN LUGAR DE LAS TÉCNICAS DE TOPOLOGÍA GLOBAL DEL ARTÍCULO DE ATIYAH Y SINGER O ANALÍTICAS EN EL ARTÍCULO DE ATIYAH Y BOTT. DE ESTE MODO, EL OBJETIVO SERÁ LA CARACTERIZACIÓN DE GILKEY DE LAS CLASES DE PONTRJAGIN DE LAS ESTRUCTURAS RIEMANNIANAS COMO LOS ÚNICOS INVARIANTES VALORADOS EN EL ÁLGEBRA EXTERIOR CON UNA CONDICIÓN DE RACIONALIDAD Y HOMOGENEIDAD. EL TRABAJO COMENZARÁ CON LA DEFINICIÓN DE CONEXIÓN EN UN FIBRADO VECTORIAL COMPLEJO COMO UN OPERADOR DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN DE LAS SECCIONES DEL FIBRADO VECTORIAL A LAS 1-FORMAS SOBRE LA BASE A VALORES EN EL FIBRADO VECTORIAL, DE MANERA QUE SE RECOMIENDA QUE EL ALUMNO ADJUDICATARIO DE ESTE TRABAJO MANEJE CON SOLTURA ESTE TIPO DE CONCEPTOS.
24.	AUTOMORFISMOS DE G-ESTRUCTURAS.	Mª TERESA DE BUSTOS MUÑOZ ANTONIO FERNÁNDEZ MARTÍNEZ	DADA UNA ESTRUCTURA MATEMÁTICA, UNO DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS BÁSICOS ES SU GRUPO DE AUTOMORFISMOS. EL OBJETO DE ESTE TRABAJO FIN DE GRADO ES EL ESTUDIO DE LOS GRUPOS DE AUTOMORFISMOS DE ESTRUCTURAS GEOMÉTRICO-DIFERENCIALES. MÁS CONCRETAMENTE, SE VERÁ UNA TEORÍA GENERAL DE AUTOMORFISMOS CON ESPECIAL ÉNFASIS EN LA CUESTIÓN DE CUÁNDO EL GRUPO DE AUTOMORFISMOS PUEDE SER DOTADO DE UNA ESTRUCTURA DE GRUPO DE LIE. EL CONCEPTO DE G-ESTRUCTURA PERMITIRÁ TRATAR DE UNA FORMA UNIFICADA MUCHAS DE LAS ESTRUCTURAS GEOMÉTRICAS. EL TRABAJO COMENZARÁ CON LA DEFINICIÓN DE G-ESTRUCTURA DE UNA VARIEDAD DIFERENCIABLE COMO UN SUBFIBRADO DEL FIBRADO PRINCIPAL DE LAS REFERENCIAS LINEALES DE LA VARIEDAD, CON GRUPO ESTRUCTURAL G. DE ESTE MODO, EL ALUMNO ADJUDICATARIO DE ESTE TRABAJO DEBERÁ CONTAR CON UN CONOCIMIENTO SÓLIDO DE LA TEORÍA DE FIBRADOS PRINCIPALES, FIBRADOS ASOCIADOS Y CONEXIONES.
25.	ESTABILIZACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS MEDIANTE BURBUJAS.	Mª ISABEL ASENSIO SEVILLA	EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS (MEF) STANDARD APLICADO A PROBLEMAS DE CONVECCIÓN-DIFUSIÓN CON CONVECCIÓN DOMINANTE CONDUCE A ESQUEMAS NUMÉRICOS INESTABLES, DEBIDO A QUE LAS SOLUCIONES EXACTAS NO SON SUAVES. EN ESTE TFG SE ESTUDIARÁ, EN CONTRAPOSICIÓN A LOS MÉTODOS DE ESTABILIZACIÓN CLÁSICOS, EL MÉTODO DE LAS BURBUJAS, QUE PLANTEA EL ENRIQUECIMIENTO DEL ESPACIO FINITO DIMENSIONAL DONDE EL MEF CALCULA LAS SOLUCIONES APROXIMADAS, MEDIANTE LO QUE SE CONOCEN COMO FUNCIONES BURBUJA.
26.	ANÁLISIS DE LAS ESTRUCTURAS DE COMUNICACIÓN ÓPTIMAS PARA MANTENER LA	ÁNGEL MARTÍN DEL REY (MAT.APLICADA), DANIEL HERNÁNDEZ SERRANO (GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA)	HAY DIFERENTES TIPOS DE REDES (REDES ENCUBIERTAS, REDES TERRORISTAS, ETC.) EN LAS QUE ES DE VITAL IMPORTANCIA CONSEGUIR UN EQUILIBRIO ENTRE EL HECHO DE MANTENER EL SECRETISMO DE LA INFORMACIÓN CONFIDENCIAL QUE FLUYE POR ELLAS Y LA EFICIENCIA OPERATIVA DE LA PROPIA RED. ESTAS SITUACIONES SE PUEDEN MODELIZAR COMO UN GRAFO EN EL QUE LOS VÉRTICES REPRESENTAN LOS INDIVIDUOS, CÉLULAS TERRORISTAS, ETC. Y LAS ARISTAS ENTRE ELLOS REPRESENTAN LOS INTERCAMBIOS DE INFORMACIÓN ENTRE LOS MISMOS. EL DISEÑO DE ESTRATEGIAS PARA DESESTABILIZAR ESTAS REDES SE FUNDAMENTA EN EL ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE LAS MISMAS MEDIANTE TÉCNICAS DE NATURALEZA MATEMÁTICA (PROCEDENTES DE LA TEORÍA DE GRAFOS Y DEL ANÁLISIS DE REDES COMPLEJAS). EL OBJETIVO DE ESTE TRABAJO ES DETERMINAR LAS

TRABAJOS DE FIN DE GRADO OFERTADOS
-GRADO EN MATEMÁTICAS-
CURSO 2017-2018

			TOPOLOGÍAS DE RED ÓPTIMAS (EN FUNCIÓN DE LA PROBABILIDAD DE DETECCIÓN DE LA COMUNICACIÓN ENTRE NODOS) PARA MANTENER EL EQUILIBRIO ENTRE LA CONFIDENCIALIDAD Y LA EFICIENCIA OPERATIVA DE LA RED.
27.	FUNCIONES BOOLEANAS Y SU USO EN LA CRIPTOGRAFÍA	ÁNGEL MARTÍN DEL REY	LAS FUNCIONES BOOLEANAS JUEGAN UN PAPEL TRASCENDENTAL EN EL DISEÑO DE DIFERENTES PROTOCOLOS CRIPTOGRÁFICOS (FUNDAMENTALMENTE, CRIPTOSISTEMAS DE CLAVE SECRETA). AHORA BIEN, NO TODA FUNCIÓN BOOLEANA ES ADECUADA PARA SU UTILIZACIÓN CON LOS FINES ANTERIORMENTE MENCIONADOS SINO QUE TIENEN QUE SATISFACER CIERTAS PROPIEDADES PARA QUE PUEDAN SER UTILIZADAS EN CRIPTOGRAFÍA, ESTO ES, PARA QUE PUEDAN RESISTIR DIFERENTES TIPOS DE ATAQUES CRIPTOANALÍTICOS. EL OBJETIVO DE ESTE TRABAJO ES ESTUDIAR DETALLADAMENTE ESTA FAMILIA DE FUNCIONES BOOLEANAS, DESCRIBIR SUS PROPIEDADES CRIPTOGRÁFICAS Y ESBOZAR LOS PRINCIPALES MÉTODOS DE CONSTRUCCIÓN DE LAS MISMAS.
28.	CONSTRUCCIÓN DE UN ESPACIO PROBABILÍSTICO MULTIDIMENSIONAL	MARÍA JESÚS RIVAS LÓPEZ	EN EL GRADO SE ESTUDIA LA NOCIÓN DE ESPACIO PROBABILÍSTICO 1-DIMENSIONAL, EN ESTE TRABAJO SE PRETENDE QUE EL ALUMNO AMPLÍE ESTE CONCEPTO AL CASO BIDIMENSIONAL. PARA ELLO, PARTIENDO DE DOS ESPACIOS MEDIBLES SE DETERMINARÁ EL ESPACIO PRODUCTO Y LA · -ÁLGEBRA A ÉL ASOCIADA. SE BUSCARÁN CRITERIOS QUE PERMITAN RELACIONAR LA MEDIBILIDAD DE FUNCIONES EN EL ESPACIO PRODUCTO CON LA MEDIBILIDAD EN LOS ESPACIOS FACTORES. SE CONSTRUIRÁ UNA MEDIDA ASOCIADA AL ESPACIO PRODUCTO VIENDO EN QUÉ CASOS ES UNA MEDIDA PROBABILÍSTICA Y DETERMINANDO LAS MEDIDAS MARGINALES. SE COMPLETARÁ EL TRABAJO ESTUDIANDO LA AMPLIACIÓN AL CASO MULTIDIMENSIONAL.
29.	APLICACIÓN DE LOS ALGORITMOS GENÉTICOS A LOS JUEGOS BIPERSONALES DE SUMA CONSTANTE	QUINTÍN MARTÍN MARTÍN	EN ESTE TRABAJO EL ALUMNO DEBERÁ COMBINAR LOS CONOCIMIENTOS DE LA TEORÍA DE JUEGOS CON LOS DE ALGORITMOS GENÉTICOS, ADEMÁS DEBE TENER CONOCIMIENTOS EN PROGRAMACIÓN LINEAL. LA REVISIÓN DE LOS OPERADORES GENÉTICOS APLICABLES AL CASO, ASÍ COMO LA INCORPORACIÓN DE ALGUNO CREADO EXPROCESO PARA ELLO SERÁ UNO DE LOS OBJETIVOS A PERSEGUIR. OTRA FASE IMPORTANTE DEL TRABAJO ES LA CREACIÓN DE FUNCIONES *FITNESS* QUE NOS INFORMEN DE LA CALIDAD DE LAS SOLUCIONES OBTENIDAS MEDIANTE ALGORITMOS GENÉTICOS. SE OBTENDRÁ LA SOLUCIÓN DE LOS JUEGOS DE MANERA DETERMINÍSTICA Y MEDIANTE ALGORITMOS GENÉTICOS ESTABLECIÉNDOSE UNA COMPARATIVA ENTRE AMBAS SOLUCIONES.
30.	LA SUFICIENCIA EN INFERENCIA ESTADÍSTICA	RAMÓN ÁNGEL ARDANUY ALBAJAR	LA DECISIÓN SOBRE SI RECURRIR A ESTADÍSTICOS PARA LA REDUCCIÓN DE DATOS ES MUY IMPORTANTE, YA QUE EMPLEAR EL CONJUNTO ENTERO DE OBSERVACIONES IMPLICA UN GASTO EXCESIVO DE RECURSOS. ES MÁS CONVENIENTE USAR EL ÚNICO VALOR DADO POR UN ESTADÍSTICO SIN QUE LA INFORMACIÓN ESENCIAL SE PIERDA. POR ELLO SE TRATA DE HACER UN ESTUDIO SOBRE EL CONCEPTO DE SUFUICIENCIA ESTADÍSTICA, SU DEFINICIÓN CLÁSICA Y BAYESIANA, EL CRITERIO DE FACTORIZACIÓN DE NEYMAN-FISHER, LA EXISTENCIA DE ESTADÍSTICOS SUFICIENTES MINIMALES Y SU RELACIÓN CON LA FAMILIA EXPONENCIAL, ASÍ COMO CON LA COMPLETITUD, INVARIANCIA E INFORMACIÓN DE FISHER.