FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJOS DE FIN DE GRADO OFERTADOS -GRADO EN MATEMÁTICAS- CURSO 2023-2024

	TÍTULO	TUTOR	RESUMEN
1.	LA DESIGUALDAD CLÁSICA DE CLIFFORD Y SUS GENERALIZACIONES	ANA C. LÓPEZ MARTÍN	En una curva lisa, el teorema de Clifford proporciona una cota superior para el número de secciones globales de un haz de línea en función de su grado. El objetivo de este trabajo es el estudio de las generalizaciones que existen en la literatura de la desigualdad de Clifford para curvas singulares. Se comenzará estudiando detalladamente el resultado clásico de Clifford en curvas lisas, para pasar posteriormente a analizar el caso de curvas nodales irreducibles. Si fuera posible, se estudiará asimismo el caso de una curva semiestable. Para estas curvas la cota superior que se busca no puede estar dada puramente en términos del grado del haz de línea, sino que entran en juego también las propiedades de conectividad del grafo dual de la curva.
2.	EL MÉTODO DEL SIMPLEX. ALGORITMO Y APLICACIONES	ARTURO ÁLVAREZ VÁZQUEZ	Se realizará un estudio del método de optimización del Simplex con sus diversas variantes y aplicaciones. Para este cometido se hará una búsqueda bibliográfica, además de u posible conexión con otros algoritmos. El punto de partida para este estudio consistirá en una síntesis coherente de la referencia bibliográfica
3.	ENDOMORFISMOS DE POTENCIA FINITA Y APLICACIONES ARITMÉTICAS	FERNANDO PABLOS ROMO	El objeto del trabajo es realizar una revisión bibliográfica detallada de los endomorfismos de potencia finita y sus aplicaciones aritméticas. La primera definición de estas aplicaciones lineales en espacios vectoriales de dimensión arbitraria es debida a J. Tate en su construcción de residuos abstractos que generalizan los residuos de diferenciales en curvas -[Ta]- . J. Tate introdujo la traza de estos endomorfismos y, a partir de ella, demostró el Teorema de los Residuos utilizando la finitud de la cohomología de las curvas completas. Con el objetivo de intentar demostrar una conjetura relativa a esta traza, M. Argerami, F. Szechtman y R. Tifenbach introdujeron una nueva forma de calcular esta traza en [AST]. Con posterioridad, en el trabajo [HPa] realizado en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Salamanca, se introdujo la noción de determinante de endomorfismos de potencia finita y se utilizó esta herramienta para dar una demostración de la Ley de Reciprocidad del símbolo de Segal- Wilson. Estas nociones serán estudiadas detalladamente en el TFG propuesto.
4.	OPERADOR DIFERENCIA Y APLICACIONES	MARIA TERESA SANCHO DE SALAS	Este trabajo tiene como objetivo el estudio del operador diferencia para tratar las ecuaciones en recurrencia lineales. En primer lugar se estudiara la teoría general de los operadores lineales y las fórmulas concretas para el operador diferencia. Se hará en la medida de lo posible sobre un anillo que es mas general que sobre un cuerpo. Se obtendrá como aplicación fórmulas conocidas de la combinatoria la resolución de ecuaciones de recurrencia en cualquier A-modulo y cálculo de sumas. Se hará un estudio también de las ecuaciones de recurrencia sobre un cuerpo que no sea algebraicamente cerrado usando teoría de invariantes. También se estudiará las funciones generatrices y su aplicación a las series formales. Por último, se hará una introducción a la resolución de ecuaciones de recurrencia en varias variables.
5.	BASES DE SCHAUDER INCONDICIONALES EN ESPACIOS DE BANACH	ÁNGEL TOCINO	El concepto de base (numerable) de Schauder en un espacio de Banach y ejemplos clásicos en espacios de sucesiones han sido presentados en la asignatura Análisis Funcional. Se propone, tomándolo como punto de partida, profundizar en el estudio de las bases de Schauder, sus propiedades, así como condiciones para su existencia. Este estudio se centrará después en las bases incondicionales. Se revisarán ejemplos básicos (bases en espacios de funciones L^p, bases ortonormales en espacios de Hilbert separables, etc.), se estudiarán las propiedades de los espacios con base incondicional, su caracterización y se abordarán resultados clásicos (teorema de Bessaga-Pelczynski, espacios de James, etc.).
6.	CÁLCULO DE PRIMITIVAS EN FORMA CERRADA	JESÚS RODRÍGUEZ LOMBARDERO	El problema que se plantea es determinar qué funciones tienen una primitiva expresable en forma cerrada, es decir, en términos de las funciones elementales (funciones racionales, exponenciales, logaritmos y trigonométricas). El problema se abordará como aplicación del álgebra diferencial y la teoría de Picard-Vessiot, que se aplica a la integración de ecuaciones diferenciales por cuadraturas, de modo análogo a cómo la teoría de Galois algebraica se aplica a la resolución de ecuaciones algebraicas por radicales. Si el tiempo y el espacio lo permiten se pueden tratar problemas más generales sobre la integración de ecuaciones diferenciales en forma cerrada, como por ejemplo el algoritmo de Kovacic para las ecuaciones lineales de segundo orden.

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJOS DE FIN DE GRADO OFERTADOS
-GRADO EN MATEMÁTICAS-
CURSO 2023-2024

	TÍTULO	TUTOR	RESUMEN
7.	: CUERPOS DE NÚMEROS ALGEBRAICOS	LUIS MANUEL NAVAS VICENTE	El trabajo consiste en estudiar los fundamentos de la teoría algebraica de números clásica, es decir, las propiedades de las extensiones algebraicas finitas del cuerpo de los racionales, llamados cuerpos de números algebraicos. El fallo en general de la factorización única en primos de los elementos de un tal cuerpo lleva a estudiar sus ideales, que sí <enen factorización única, y al grupo de clases de ideales, que es el análogo aritmé<co del grupo de Picard. Se necesitan también determinar las valoraciones del anillo de enteros del cuerpo, y las completaciones respec<vas respecto a ellas, de manera también análoga a la geometría algebraica. Los resultados importantes incluyen: la finitud del grupo de clases de ideales, u<lizando el método de Minkowski, el teorema de Dirichlet de las unidades, que determina la estructura del grupo de unidades del anillo de enteros, y la función zeta de Dedekind, que introduce técnicas de análisis y relaciona, en la llamada fórmula del número de clases los invariantes algebraicos con el residuo
8.	CATEGORÍA DE ESPACIOS DE BANACH	MERCEDES MALDONADO CORDERO	La teoría de Categorías, introducida en 1945 por S. Eilenberg y S. MacLane, describe muchas de las propiedades más generales y abstractas de las matemáticas. En esta teoría, la estructura interna de un objeto se deduce a partir de las relaciones que tiene ese objeto con otros objetos. En este trabajo se pretende comenzar con las nociones generales de la teoría de Categorías: categoría, functor, morfismos, límites y colímites, functor adjunto, … Posteriormente se introducirá la categoría Ban y se traducirán los conceptos del Análisis Funcional a la teoría de Categorías.
9.	EXTENSIÓN DE FUNCIONES HOLOMORFAS DE VARIAS VARIABLES	PASCUAL CUTILLAS RIPOLL	Deberá realizarse en primer lugar una exposición de las primeras nociones y resultados de la teoría de las funciones holomorfas de varias variables, obteniéndose la generalización para estas funciones de la fórmula integral de Cauchy y deduciéndose de ello la relación existente entre funciones holomorfas y series de potencias. Posteriormente se estudiarán las propiedades de las funciones de una variable que sean fácilmente generalizables para el caso de varias variables, incluyéndose las desigualdades de Cauchy, el principio del módulo máximo y el principio de prolongación analítica. Una vez expuestos estos preliminares se mostrará que, al contrario de lo que sucede en dimensión 1, hay subconjuntos abiertos de C^n (con n≥2) para los cuales toda función holomorfa puede prolongarse analíticamente a un abierto estrictamente mayor. Se presentarán varias situaciones en que ello sucede y, en particular, se demostrará una generalización del teorema de las singularidades evitables de Riemann y un teorema de Hartogs según el cual toda función holomorfa en el complementario de un subconjunto compacto K de un abierto conexo U de C^n, tal que U-K también sea conexo, puede prolongarse como función holomorfa a todo U. Dependiendo de la capacidad y del interés del estudiante que lo desarrolle, así como de posibles conveniencias, el trabajo podría continuar algo más mediante la presentación de los conceptos de dominio de holomorfía, convexidad holomorfa y relación entre ellos.
10.	EL FLUJO DE ACORTAMIENTO DE CURVAS PLANAS.	ANTONIO LÓPEZ ALMOROX	El flujo de acortamiento de una curva (curve shortening flow) es un ejemplo sencillo de los llamados flujos geométricos de curvatura. Este flujo describe la evolución en el tiempo de una curva cerrada simple en el plano euclídeo con una velocidad proporcional a su curvatura en la dirección de su vector normal. Fue propuesto inicialmente por W.W. Mullins en 1956 para modelar el movimiento de fronteras idealizadas y puede ser considerado como un caso particular del llamado flujo de curvatura media propuesto por K. A. Brakke en 1978. Sin embargo, los mayores avances sobre las propiedades geométricas de este flujo y sus características fueron llevado a cabo en los años ochenta por M. Gage, R. Hamilton y M. Grayson. El proyecto que se presenta es un trabajo de revisión bibliográfica e investigación centrado en el estudio de las propiedades geométricas del flujo de acortamiento de curvas en el plano. En la primera fase del desarrollo del trabajo se analizarán las propiedades básicas de este flujo relacionadas con el acortamiento del perímetro y del área encerrada por las curvas en su evolución bajo las hipótesis de que la curva se mantenga simple en su evolución analizando el ritmo de decrecimiento del área y del perímetro. Se analizarán las soluciones homotéticas de este flujo y otras soluciones de particular relevancia teórica. En una segunda fase se abordarán los resultados de Gage y Hamilton sobre la evolución de curvas convexas bajo el flujo de acortamiento y se analizar el problema equivalente en términos de la ecuación de evolución de la curvatura de tales curvas. Esto permite analizar propiedades de este flujo como por ejemplo la desigualdad isoperimétrica de Gage. Se analizará la convergencia de las funciones curvatura de las curvas convexas demostrando que la normalización de las curvas bajo el flujo de acortamiento no solo converge continuamente al círculo unidad sino también diferenciablemente. Si cabe la posibilidad, se abordará también el teorema de Crayson relacionado con la evolución de curvas simples (no necesariamente convexas) bajo este flujo.

TRABAJOS DE FIN DE GRADO OFERTADOS -GRADO EN MATEMÁTICAS- CURSO 2023-2024

	TÍTULO	TUTOR	RESUMEN
11.	DEFORMACIONES DE VARIEDADES ALGEBRAICAS Y MÓDULI LOCAL.	DANIEL HERNÁNDEZ RUIPÉREZ	El trabajo es una introducción a la teoría de deformaciones de variedades algebraicas no singulares con especial énfasis en el caso de curvas algebraicas. La teoría de deformaciones permite abordar problemas de móduli local de variedades algebraicas de modo constituyendo un método para conocer la estructura local de los "espacios de móduli", es decir, de los espacios cuyos puntos se corresponden con las variedades de una determinada familia. Un ejemplo será el de la familia de las curvas algebraicas no singulares de género fijo. Esta familia puede dotarse (bajo ciertas hipótesis que no serán importantes para el trabajo) de la estructura de una variedad algebraica. La teoría de las deformaciones permite en este caso determinar cómo es esta variedad en "un entorno del punto correspondiente a una curva prefijada" y determinar su dimensión. El estudiante tendrá la oportunidad de utilizar diversas técnicas de álgebra conmutativa y geometría algebraica en un problema concreto. Deberá revisar la teoría de derivaciones y diferenciales, estudiar el concepto de deformación infinitesimal de una variedad y su relación con derivaciones locales (o vectores tangentes) y calcular el espacio de estas deformaciones, primero en el caso afín, y luego en general como un grupo de cohomología. Para eso tendrá que utilizar métodos de álgebra conmutativa en el caso afín, y métodos cohomológicos en el caso general. Finalmente, deberá comprender la relación entre las deformaciones y los espacios de móduli locales.
12.	INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE VARIEDADES ABELIANAS Y TOROS COMPLEJOS.	ESTEBAN GÓMEZ GONZÁLEZ	Los toros complejos y las variedades abelianas son el análogo a los grupos de Lie diferenciables compactos. Son objetos con unas propiedades muy específicas y que permiten hacer un estudio geométrico detallado de estos objetos. El trabajo consistirá en realizar un estudio de las propiedades básicas de las variedades abelianas y su relación con los toros complejos en el caso del cuerpo de los complejos. Para ello será necesario utilizar algunas nociones de teoría general de esquemas. Se podrá hacer un estudio más profundo, dependiendo de hasta donde el estudiante quiera llegar. Es imprescindible que el estudiante haya cursado las asignaturas de geometría algebraica y análisis complejo.
13.	INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE STANLEY-REISNER	FERNANDO SANCHO DE SALAS	Se trata de desarrollar los fundamentos básicos de la teoría de Stanley-Reisner. Para ello, en primer lugar, hay que dar unas breves nociones de complejos simpliciales abstractos (finitos) y en segundo lugar introducir la noción de anillo Cohen-Macaulay y sus propiedades más básicas. El objetivo fundamental es el teorema de Stanley que relaciona la Cohen-Macaulicidad del anillo (denominado de Stanley-Reisner) asociado a un complejo simplicial abstracto con propiedades puramente topológicas de dicho espacio simplicial.
14.	GRUPOS FUNDAMENTALES DE CURVAS ALGEBRAICAS	FRANCISCO J. PLAZA MARTÍN	El trabajo propuesto consiste en realizar una revisión bibliográfica, a partir de 1 como referencia principal. El objetivo es llegar a definir el grupo fundamental de una curva algebraica y establecer y demostrar, para una curva fija X la equivalencia categorial entre revestimientos de X y los conjuntos con acción del grupo (ver Teorema 4.6.4 de 1 para el enunciado preciso). Para este fin, es necesario conocer la Teoría de Galois de cuerpos y la Geometría Algebraica de la curva. Sobre ello, se desarrollará la teoría de Galois para extensiones infinitas y para revestimientos de variedades topológicas. Apoyándose en la construcción de una curva como variedad de Riemann de un cuerpo de grado de trascendencia 1, se alcanzará el resultado.
15.	CLASIFICACIÓN DE FIBRACIONES EN ESPACIOS PROYECTIVOS SOBRE CURVAS ELÍPTICAS	CARLOS TEJERO PRIETO	En este trabajo se abordará la clasificación de las variedades fibradas en espacios proyectivos sobre curvas elípticas. Para conseguir dicho objetivo se estudiará la equivalencia de dichas variedades con las proyectivizaciones de los fibrados vectoriales sobre las curvas elípticas. La obtención de la clasificación se basará de modo clave en la descripción de los fibrados vectoriales sobre curvas elípticas que fue realizada por Atiyah. En particular se analizará en detalle el caso de las superficies regladas sobre las curvas elípticas que corresponde al caso en el que las fibras son rectas proyectivas.
16.	LA FORMA DE POINCARÉ-CARTÁN EN EL CÁLCULO DE VARIACIONES.	PABLO M. CHACÓN ANTONIO FERNÁNDEZ MARTÍNEZ	El objetivo de este trabajo es describir las herramientas básicas del cálculo de variaciones que de manera tradicional se ha desarrollado en este Departamento de Matemáticas. Desde los años 70, y centrados en la figura del profesor Pedro Luis García Pérez, distintos trabajos fueron exponiendo un método pionero de tratar el cálculo de variaciones que ha permitido un fuerte avance en la teoría de campos más allá del tradicional enfoque de la mecánica geométrica. Este Trabajo de Fin de Grado comenzará con nociones básicas de fibrados, para hacer la construcción del fibrado de los jets. Para el estudio de la geometría de este fibrado se introducen conceptos como la diferencial vertical y la forma de estructura, para lo cual será necesario un cálculo diferencial valorado. Para el cálculo variacional de un lagrangiano dado, se estudiará la forma de Poincaré-Cartan, la noción de sección crítica, para alcanzar las ecuaciones de Euler.Lagrange. En la medida de lo posible, se describirán ejemplos tanto de la mecánica como más propios de la teoría de campos.

TRABAJOS DE FIN DE GRADO OFERTADOS -GRADO EN MATEMÁTICAS- CURSO 2023-2024

	TÍTULO	TUTOR	RESUMEN
17.	CONEXION ENTRE ECUACIONES DIFERENCIALES Y EN DIFERENCIAS	JESÚS VIGO AGUIAR	Se trata de un trabajo para aquellos alumnos que hayan cursado asignaturas de métodos numéricos III y métodos numéricos en finanzas. Este trabajo el alumno intentara profundizar en la correspondencia entre las ecuaciones diferenciales y ecuaciones de diferencias en el caso no lineal. Más concretamente, dada una ecuación diferencial de tipo Duffing con condiciones iniciales en un punto x0 y un tamaño de paso h> 0 encontramos una ecuación en diferencias con la misma solución que la ecuación diferencial original en los puntos xn=x0+n h siendo n un numero natural. Se intentará demostrar que independientemente de los coeficientes de la ecuación original, las soluciones de esta ecuación en diferencias son sucesivos valores discretos exactos de la solución de la ecuación diferencial original. Si se consigue esto se podría pensar en escribir algún método numérico basado en la ecuación en diferencias obtenida. Aunque el trabajo es amplio se podría investigar el caso de las ecuaciones diferenciales fraccionarias. Es imprescindible haber cursado las asignaturas mencionadas, empezar desde el primer día y facilidad a la hora de manejar lenguajes de programación.
18.	AUTOMORFISMOS DE G-ESTRUCTURAS	ANTONIO FERNÁNDEZ MARTÍNEZ M. TERESA DE BUSTOS MUÑOZ	Dada una estructura matemática, uno de los objetos matemáticos básicos es su grupo de automorfismos. El objeto de este Trabajo Fin de Grado es el estudio de los grupos de automorfismos de estructuras geométrico-diferenciales. Más concretamente, se verá una teoría general de automorfismos con especial énfasis en la cuestión de cuándo el grupo de automorfismos puede ser dotado de una estructura de grupo de Lie. El concepto de G-estructura permitirá tratar de una forma unificada muchas de las estructuras geométricas. El trabajo comenzará con la definición de G-estructura de una variedad diferenciable como un subfibrado del fibrado principal de las referencias lineales de la variedad, con grupo estructural G. De este modo, el alumno adjudicatario de este trabajo deberá contar con un conocimiento sólido de la teoría de fibrados principales, fibrados asociados y conexiones.
19.	FUNCIONES ESPECIALES Y ECUACIONES DIFERENCIALES FUCHSIANAS	MIGUEL ÁNGEL GONZÁLEZ LEÓN	Una gran parte de las funciones especiales que aparecen habitualmente en diferentes ramas de la Matemática Aplicada y de la Física Matemática se caracterizan por ser soluciones de ecuaciones Fuchsianas (ecuaciones diferenciales ordinarias definidas en la esfera de Riemann y tales que todos sus puntos singulares son puntos singulares regulares), particularmente las de segundo orden, o de sus diferentes formas de confluencia. En este trabajo se estudiarán las propiedades generales de este tipo de ecuaciones y se profundizará en los casos de tres puntos singulares (ecuación Hipergeométrica de Gauss) y el de cuatro puntos singulares (ecuación de Heun), y las correspondientes ecuaciones confluentes. Se analizarán en este contexto varios ejemplos de interés en Física en los que se presentan de forma natural funciones especiales de estas características.
20.	MÉTODO DEL GRADIENT FLOW	JESÚS MARTÍN VAQUERO, ALBERTO ALONSO IZQUIERDO	Algunos métodos de optimización, como el método del descenso o gradiente, pueden ser vistos como un método para resolver ecuaciones diferenciales con ordinarias (EDOs), en este caso, el método de Euler explícito. Y viceversa, el método de Douglas-Rachford fue propuesto en primer lugar para resolver una ecuación en derivadas parciales (EDPs), la ecuación del calor, pero ahora es más usado para resolver problemas de minimización. En algunos casos, alguno de estos métodos de optimización, tienen interesantes conexiones con la teoría funcional no lineal, que les dotan de ciertas propiedades que pueden ser muy interesantes para resolver algunos tipos de problemas. En este Trabajo Fin de Grado se pedirá al alumno que haga un estudio del arte sobre el método del *Gradient Flow* y su uso para resolver ecuaciones diferenciales procedentes de mecánica. Finalmente, el alumno tendrá que programar dicho método y compararlo con otro tipo de algoritmos más corrientes en algún problema concreto.

VNiVERSiDAD D SALAMANCA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

800 AÑOS 1218 ~ 2018

TRABAJOS DE FIN DE GRADO OFERTADOS -GRADO EN MATEMÁTICAS- CURSO 2023-2024

	TÍTULO	TUTOR	RESUMEN
21.	EL PROBLEMA CLÁSICO DEL JUGADOR Y ESTRATEGIAS DE JUEGO.	JAVIER VILLARROEL	El problema de la ruina del jugador es uno de los problemas clásicos del campo de la probabilidad. En la formulación original de Bernuilli, un jugador g_1 comienza con una riqueza inicial de x unidades, y gana o pierde una unidad en cada turno de un juego con probabilidades respectivas p y q = 1- p frente a otro jugador g_2 que empieza con una cantidad x'; y cuyas ganancias son las pérdidas de g_1. El juego terminará cuando alguno de los dos alcance la ruina. Dos de las cuestiones básicas son determinar la probabilidad de ruina y la duración esperada y distribución de la duración del juego. El problema puede ser modelado por un recorrido aleatorio. Los estadísticos fundamentales son los tiempos de ruina, su media y distribución de probabilidad, así como la particular de cada uno de los jugadores. Ambos problemas se resuelven encontrando las soluciones adecuadas a las ecuaciones de diferencia. Se abordaran también los problemas de cómo afecta a la situación cuando el jugador hace apuestas de cantidad superior a la unidad, o ¿Qué ocurre si el jugador en cada apuesta lanza un "órdago"? o ¿Qué ocurre con apuestas variables y en ese caso cual es la estrategia optima?
22.	RECORRIDO ALEATORIO Y PROBLEMA DE ESCAPE DE INTERVALOS.	JAVIER VILLARROEL	El recorrido aleatorio clásico constituye el ejemplo básico de cadenas de Markov en tiempo discreto. A pesar de su sencillez conceptual presenta una notable dificultad de tratamiento. Su estudio permite sin embargo el estudio analítico completo de los principales estadísticos relacionados, como son los tiempos de llegada, máximos del proceso, tiempos de escape de intervalos y tiempos medios. Estos tienen multitud de aplicaciones en biología matemática. El objetivo del trabajo es estudiar los estadísticos mencionados anteriormente, desarrollando y resolviendo las ecuaciones en diferencias que rigen estos procesos. Particular interés se dedicará al problema de escape de intervalos, el principio de reflexión, la distribución del tiempo y de la posición en el escape y sus funciones generatrices de probabilidad. El trabajo considerará también los recorridos aleatorios con regeneración, con "restart" en tiempos puramente periódicos o bien puramente aleatorios.
23.	LA TEORÍA DE FRONTERAS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS SEGÚN FELLER	JAVIER VILLARROEL	El problema de las fronteras de difusiones es uno de los problemas clásicos del campo de la probabilidad avanzada y procesos estocásticos. Los *procesos estocásticos* son una herramienta fundamental para describir sistemas dinámicos cuya evolución en el tiempo es de naturaleza aleatoria. En este trabajo se estudiará de forma completa y sintética la teoría clásica moderna de las fronteras de los procesos de difusión unidimensionales y su clasificación, utilizando la función de escalaasí como la medida de velocidad asociada a un proceso de difusión unidimensional, asís como las otras dos medidas de Feller. Se llegará así a una clasificación de, en principio, 16 tipos de fronteras entre las que destacan las accesibles y no accesibles, de salida, regular, natural, pegajosas y de entrada. Se abordarán las propiedades de cada tipo. La teoría se ilustrará con una sección de ejemplos.
24.	MÉTODOS MULTIVARIANTES BASADOS EN COMPONENTES PRINCIPALES	ANA B. NIETO LIBRERO NEREA GONZÁLEZ GARCÍA	El análisis de componentes principales es una de las técnicas multivariantes no supervisadas con mayor importancia en la historia de la estadística y más utilizada en la actualidad. El análisis de componentes principales clásico surge en el año 1901 y a lo largo de las décadas y hasta el día de hoy se han propuesto múltiples alternativas de este para cubrir las numerosas necesidades que han ido apareciendo, e incluso su combinación con otros métodos multivariantes. El método se centra en la reducción de la dimensionalidad de una matriz de datos multivariantes, mediante la proyección de esta en un espacio de menor dimensión donde se maximice la variabilidad de los datos de partida. En este trabajo, el estudiante deberá realizar una exhaustiva revisión bibliográfica sobre metodologías de reducción de la dimensionalidad basadas en componentes principales, con especial énfasis a desarrollos recientes. Para ello, deberá identificar los elementos conceptuales necesarios para comprender la estructura de los datos en el contexto de las técnicas estadísticas para datos multivariantes, así como los fundamentos matemáticos sobre los que se apoyan el desarrollo metodológico tanto del análisis de componentes principales clásico, como de las distintas variantes formuladas a partir de este. Finalmente, deberá desarrollar una aplicación a un conjunto de datos, real o simulado, utilizando algún lenguaje de programación, como R o Python, con una interpretación de resultados crítica de acuerdo con los fundamentos matemáticos asociados a la metodología.

	TÍTULO	TUTOR	RESUMEN
25.	INFERENCIA ESTADÍSTICA NO PARAMÉTRICA Y SU APLICACIÓN AL ÁMBITO CLÍNICO	ANA B. NIETO LIBRERO NEREA GONZÁLEZ GARCÍA	La inferencia estadística involucra la estimación y contrastes de hipótesis. Son numerosas las aplicaciones que utilizan técnicas estadísticas de inferencia paramétrica. Sin embargo, en la práctica no siempre se cumplen las hipótesis de partida necesarias para su uso, y es por eso que en múltiples ocasiones se utilizan otras técnicas estadísticas diseñadas desde un punto de vista no paramétrico. El objetivo del trabajo es que el estudiante realice una revisión de las principales alternativas de inferencia estadística no paramétrica, como, por ejemplo, las pruebas de Kruskal-Wallis o Friedman, como alternativa al Análisis de la Varianza paramétrico, o los test de bondad de ajuste, como Shapiro-Wilk, entre otros. En todos los casos, deberán ser formalizadas matemáticamente, expresando adecuadamente el objetivo inicial de la técnica planteada, así como los supuestos iniciales, y en el caso que corresponda, el contraste a plantear, construcción del estadígrafo de contraste y determinación de la distribución asociada, delimitación de regiones de aceptación/rechazo o cálculo del p-valor. Finalmente, se deberán aplicar algunas de estas alternativas a un conjunto de datos del ámbito clínico, implementándolos previamente en algún lenguaje de programación como R o Python.
26.	CRIPTOGRAFÍA BASADA EN ISOGENIAS (ISOGENY BASED CRYPTOGRAPHY)	JOSÉ IGNACIO IGLESIAS CURTO	Encontrar una isogenia entre dos curvas elípticas sobre un cuerpo finito es un problema difícil incluso para ordenadores cuánticos. Esto le convierte en un buen candidato para ser la base de un sistema criptográfico y en particular de criptosistemas resistentes a ataques cuánticos. Uno de los más relevantes ha sido el protocolo de intercambio de claves denominado SIDH, Supersingular Isogeny Diffie-Hellman, propuesto por Jao y De Feo. Su seguridad no se basa sólo en el problema de la isogenia sino también en ciertos puntos de las curvas elípticas que han de ser intercambiados. SIDH avanzó a la ronda final en el concurso del NIST para el estándar de criptografía post-cuántica. Y tres semanas más tarde fue roto. El ataque se centraba en los mencionados puntos auxiliares, por lo que el interés del problema de la isogenia sigue intacto. De hecho, se mantiene como una de las principales líneas de trabajo en la criptografía post-cuántica. Más allá de la brecha de seguridad, este ataque ha planteado interesantes cuestiones sobre futuras líneas de la criptografía basada en isogenias. Particular interés tienen cuestiones relacionadas con la identificación de curvas elípticas supersingulares y la obtención del anillo de endomorfismos de una curva de ese tipo. El objetivo del trabajo es desarrollar el problema de la isogenia haciendo hincapié en su complejidad. A continuación, se presentarán diversos criptosistemas conocidos basados en este problema. Puede hacerse una exposición del mencionado ataque al SIDH. Además, se plantearán diversos aspectos de estudio actual que tienen por objetivo solventar las brechas de los protocolos conocidos y desarrollar nuevos criptosistemas.
27.	RECUPERACIÓN DE INFORMACIÓN PRIVADA (PRIVATE INFORMATION RETRIEVAL)	JOSÉ IGNACIO IGLESIAS CURTO	El problema de la recuperación de información privada, habitualmente referido como PIR por sus siglas en inglés, consiste en que un usuario pueda recuperar información de una o varias bases de datos sin dar ninguna información acerca del registro que está consultando. La formalización más sencilla de este problema sería: dada una cadena de bits $x_1, \ldots, x_n$ obtener el valor de un bit x_j sin dar ninguna información acerca del índice j. Este problema tiene una evidente utilidad práctica en situaciones de almacenamiento de información privada en bases de datos gestionadas por terceros. La solución teóricamente más segura es enviarle al usuario los valores de todos los registros. Pero también es la más ineficiente. El objetivo del problema es minimizar la proporción de datos enviados respecto a los requeridos dando la menor información posible sobre qué registros se desea consultar. Existen distintas soluciones en función de si los datos están en un único repositorio o distribuidos entre distintas bases de datos, si se asume poder de cómputo limitado o ilimitado al gestor de la base de datos, si el gestor puede resolver ciertos problemas, como el problema de residuos cuadráticos, si pueden usarse funciones de un sentido,… Distintos enfoques y protocolos propuestos tienen conexiones directas con códigos de bloques y protocolos criptográficos, pero también se hace uso de diferentes estructuras algebraicas, de Teoría de Números o Teoría de Juegos entre otros. El objetivo del trabajo es desarrollar la formalización matemática de los fundamentos del problema, presentar y comparar distintas soluciones junto con las herramientas en que se basan e implementar uno o varios protocolos para realizar diferentes simulaciones.

TRABAJOS DE FIN DE GRADO OFERTADOS
-GRADO EN MATEMÁTICAS-
CURSO 2023-2024

	TÍTULO	TUTOR	RESUMEN
28.	ASPECTOS MATEMÁTICOS DE LA SOLUCIÓN DE GÖDEL A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN	RICARDO J. ALONSO BLANCO	En la teoría de la relatividad general el universo físico se modela sobre una variedad 4 dimensional dotada de una métrica con signatura de Lorentz (es decir, del tipo -,+,+,+); las ecuaciones de campo de Einstein prescriben una relación entre dicha métrica, su curvatura de Ricci y un tensor que incorpora el contenido del universo (materia, cargas, etc.) en cada caso [1,3]. La búsqueda de soluciones exactas de dichas ecuaciones es, por tanto, una tarea esencial en la búsqueda de modelos cosmológicos. En 1949, Kurt Gödel publicó una solución con inesperadas propiedades [2]. El trabajo que se propone es redactar todo lo necesario para plantear las ecuaciones de Einstein, describir la solución de Gödel y establecer las propiedades básicas de ésta última.
29.	CONDICIONES DE ESCISIÓN DE FIBRADOS VECTORIALES EN ESPACIOS PROYECTIVOS COMPLEJOS	DARÍO SÁNCHEZ GÓMEZ	El objetivo del trabajo es introducir al estudiante en el problema de determinar bajo qué circunstancias un fibrado vectorial en un espacio proyectivo descompone como suma directa de fibrados de línea. Para ello el estudiante deberá familiarizarse con las nociones y algunas propiedades básicas de los fibrados vectoriales y de los fibrados proyectivos. Además, se realizará un trabajo de revisión bibliográfica de los resultados conocidos más relevantes sobre dicho problema como son la clasificación de los fibrados vectoriales en la recta proyectiva dada por Grothendieck y el criterio de escisión de Horrocks.
30.	COMPLEJOS SIMPLICIALES Y REDES DE COMUNIDADES.	DANIEL HERNÁNDEZ SERRANO	La complejidad de muchos sistemas biológicos, sociales y tecnológicos se deriva de la riqueza de las interacciones entre sus agentes. Durante las últimas décadas, gran variedad de redes o sistemas complejos se han descrito como grafos (donde los pares de nodos que interactúan están conectados por enlaces) y, desde este punto de vista, la Ciencia de Redes proporciona con éxito un formalismo universal que permite modelar y estudiar sistemas complejos basados en interacciones de pares entre agentes. Sin embargo, muchas de estas redes reales conllevan de manera inherente interacciones entre más de dos agentes, entre grupos y comunidades, por lo que entender estas estructuras de orden superior es clave para mejorar nuestra capacidad de modelación y ayudarnos a entender y predecir comportamientos y dinámicas en este tipo de redes. Una de las estructuras matemáticas que nos van a permitir codificar este tipo de interacciones múltiples en una red son los complejos simpliciales, que han sido ampliamente utilizados en el análisis topológico de datos durante las dos últimas décadas y dentro del contexto de la ciencia de redes en los últimos años. Este trabajo pretende introducir al estudiante en la teoría de redes y en las aplicaciones de los complejos simpliciales dentro de este último contexto: el estudio las redes complejas en las que puede haber interacciones entre varios agentes. Se estudiarán los conceptos básicos de la Ciencia de Redes y los distintos tipos de redes, así como sus distribuciones de grado, se estudiarán las definiciones y propiedades básicas de los complejos simpliciales, las recientes nociones de adyacencia (superior, inferior y generalizada) para símplices, los diferentes grados simpliciales que de ellas se derivan (que generalizan al caso de redes simpliciales la noción de grado de un vértice en un grafo, y cuya importancia radica en el hecho de que permite, entre otras cosas, clasificar redes, estudiar sus propiedades topológicas y dilucidar patrones de comportamiento); se mostrarán sus propiedades combinatorias y se explicará su relación con las comunidades influyentes en una red; se estudiarán los métodos de cómputo de grados simpliciales usando operadores de borde y coborde en complejos simpliciales y usando el laplaciano combinatorio multiparamétrico sobre un complejo simplicial (que generaliza el laplaciano para grafos y el laplaciano combinatorio); se comentarán algunas aplicaciones como el estudio de la conectividad de orden superior en redes simpliciales reales en términos de las distribuciones de grado de estos grados simpliciales; por último, y si el tiempo lo permite, se estudiarán algunas de las medidas de centralidad que se han introducido recientemente en complejos simpliciales, como podrían ser el coeficiente de agrupamiento simplicial, la centralidad de cercanía o la de vector propio. Dentro de este trabajo de revisión bibliográfica, y siempre y cuando la base teórica de teoría de redes y las nociones básicas de complejos simpliciales estén asimiladas, el estudiante tendrá la libertad de profundizar sólo en alguna de sus partes, o de focalizar su interés en nuevas perspectivas en redes simpliciales complejas como son la propagación y difusión de virus en este tipo de redes, la creación de nuevos de algoritmos de generación de redes simpliciales sintéticas (que predigan las distribuciones de grados simpliciales esperadas desde un punto de vista analítico) o la creación de nuevas medidas de centralidad en redes simpliciales.

	TÍTULO	TUTOR	RESUMEN
31.	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LOS AUTÓMATAS CELULARES CUÁNTICOS	ÁNGEL MARTÍN DEL REY	El objetivo principal de este Trabajo Fin de Grado consiste en llevar a cabo la fundamentación matemática del concepto de autómata celular cuántico y la demostración de diversos teoremas de equivalencia asociados. En concreto se empezará revisando el concepto de autómata celular clásico, introducido por J. Von Neumann y S. Ulam a mediados del siglo XX, para pasar posteriormente a extender dicha noción a la de “autómata celular cuántico” (que denotaremos por su acrónimo en inglés: QCA). Seguidamente se formalizan los conceptos de QCA inactivo y de QCA particionado (PQCA), para extender seguidamente la noción de QCA empleando puertas lógicas cuánticas como funciones de transición local dando lugar a los “quantum gate cellular automata” (QGCA). A continuación, se enunciarán y demostrarán diversos teoremas de equivalencia asociados a estos conceptos. Finalmente se verá cómo es posible simular QCAs utilizando máquinas de Turing cuánticas y se mostrarán algunas aplicaciones.